Universidad de Concepción
Departamento de Física

ORIGEN DE HETEROGENEIDADES DEL INTERIOR DE LA TIERRA

TESIS PARA OPTAR AL TITULO PROFESIONAL DE GEOFISICO

por

Andrea Valeska Aguilar Sánchez

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
Concepción, Chile.

Profesor Guía : Dr. Klaus Bataille

Agradecimientos

Esta tesis de titulo, ha requerido de mucho esfuerzo, dedicación y perseverancia, y no hubiese sido posible, sin la ayuda de quienes citaré a continuación y muchos de los cuales han sido un soporte fundamental en momentos de angustia y desgano.

Se la dedico primeramente a Dios, por cuidarme cada día, por darme fortaleza, animo, por ser mi soporte en las dificultades y acompañarme en cada paso que he dado, sosteniéndome siempre (Isaías 41:10).

A mi familia, mil gracias por todo su apoyo, a mi papito René Aguilar y a mi mamita Marlene Sánchez por su infinito amor, apoyo, confianza, y sacrificio, por postergarse y luchar cada día para que nosotros podamos estudiar y ser felices. Gracias a mis tres alegrías y más grandes orgullos; a mi princesita Franchesca que cada día me da su amor, apoyo, confianza, alegría, y ganas de seguir. A mis niños René Ignacio, y Rodrigo, muchas gracias, por estar conmigo, por su apoyo, eterno cariño y alegría siempre. Gracias también a los que ya no están, a mi querido abuelito Juan Bautista y a mi tía Carmen Gloria.

Gracias de manera especial a quien me acompañó en todos estos años, Pablo González, por su incondicional apoyo, preocupación, paciencia, cuidado y amor, porque siempre tuvo para mí un abrazo, y una palabra de aliento. Gracias a su familia, en especial tío Osvaldo y tía Teresa, por el cariño y apoyo siempre.

Por otro lado, expresar agradecimiento a quienes me forjaron desde niña en mi ciudad Coyhaique, profesores de Escuela Baquedano, y Liceo San Felipe Benicio. Agradecer a mis compañeros y amigos por su apoyo, compañía, ayuda y buenos momentos compartidos. Gracias a los profesores, secretarias y auxiliares del departamento de Física, y Geofísica de la Universidad de Concepción, en especial a profesores, Patricio Salgado, Hernán Astudillo, Claudio Faúndez, Alberto Foppiano y a secretarias tía Marce, y tía Martita.

En especial gracias a mi profesor Klaus Bataille, por su orientación, disposición, paciencia y apoyo en el presente trabajo.

Gracias

Andrea Valeska Aguilar Sánchez.-

Resumen

El conocimiento de las características del interior de la Tierra se basa principalmente en el estudio de la interacción de las ondas sísmicas con el medio. Variaciones de pequeña escala del medio, de 1-100 km, interactúan con ondas de cuerpo de alta frecuencia, esparciendo su energía en el espacio y tiempo. Esto genera la coda sísmica, entendida como la superposición de ondas scattereadas por el medio. La coda sísmica es muy sensible a los cambios que ocurren en el medio, y su estudio aporta al conocimiento de la estructura fina del interior de la Tierra. Actualmente existe cierto consenso sobre el origen de las heterogeneidades que aportan a la coda sísmica, si son producto de heterogeneidades del manto y/o zonas cercanas a frontera manto-núcleo-externo (CMB) y/o frontera núcleo externo-núcleo-interno. El objetivo de esta Tesis es la de aportar al conocimiento del origen de las heterogeneidades del interior de la Tierra, basado en el estudio y modelamiento de las ondas sísmicas de alta frecuencia que se propagan por el interior terrestre. Para ello analizo el sismo de Bolivia ocurrido el 9 de junio de 1994 (Longitud: 67.55, Latitud: -13,84), a gran profundidad y de gran magnitud (h=630 km, M=8.2), registrado en la red mundial, comparándolas con simulaciones teóricas de las distintas ondas que viajan por el interior de la tierra. Desarrollo una metodología para el modelamiento numérico de la propagación de las ondas en un medio altamente heterogéneo. Me enfoco en teoría de "*single-scattering*", asumiendo que las heterogeneidades perturban poco a la propagación de las ondas. Teniendo la amplitud resultante del modelo para fases que interactúan con el interior terrestre, y al comparar con los datos registrados del sismo de Bolivia, se puede concluir que el modelo del núcleo externo es el mas apropiado. Debido a que fases scattereadas en el núcleo externo se ajustan mejor a la coda con los tiempos de llegada y forma de decaimiento (en cada distancia epicentral analizada). Estos resultados tienen una implicancia en la comprensión de los procesos geodinámicas relacionados con la evolución del manto y del núcleo, y la importancia que esto tiene para comprender la evolución de la Tierra.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Teoría **7**
2.1. Ondas sísmicas . . . 7
2.2. Ecuación de movimiento . . . 9
2.3. Propagación de ondas en un medio homogéneo . . . 10
2.4. Propagación de ondas en un medio inhomogéneo . . . 11
2.4.1. Teoría de rayos . . . 12
2.4.2. Teoría de Scattering . . . 24

3. Datos y Método **28**
3.1. Datos . . . 28
3.2. Método . . . 30
3.2.1. Trazado de Rayos . . . 30
3.2.2. Curvas Camino-Tiempo . . . 33

4. Análisis **36**
4.1. Análisis de Datos . . . 36
4.1.1. Tiempos de viaje . . . 36
4.1.2. Fases Modeladas . . . 38

5. Conclusiones y Discusiones **46**

A. **48**
A.1. Función de Green . . . 48

Bibliografía **52**

Capítulo 1

Introducción

La mayoría de los análisis de la estructura terrestre son basados en observaciones de tiempos de viaje y forma de onda, de ondas sísmicas directas que viajan a lo largo del camino de rayos determinado por la estructura de velocidad a gran escala de la tierra. Perturbaciones de velocidad o densidad a pequeña escala causan una fracción de energía sísmica scattereada en otras direcciones, llegando antes y después de la fase principal como energía incoherente en un intervalo extendido de tiempo. Este tren de onda es llamado coda de la fase directa.

Scattering desde heterogeneidades arbitrarias es un fenómeno común en muchos campos de la ciencia y han sido desarrollados modelos teóricos en física, acústica y sismología. Para velocidad y perturbaciones de densidad suficientemente débiles, la mayoría de energía scattereada habrá experimentado sólo un evento de scattering y por lo tanto, puede ser modelado adecuadamente usando teoría de single-scattering. En este caso los cálculos son simplificados, si se asume que las ondas primarias son alteradas levemente al pasar por región de scattering (*Aproximación de Born*). El total de energía en el campo de onda sísmico por lo tanto aumenta, por la cantidad de energía contenida en las ondas scattereadas y no obedecen a la conservación de energía. Así esta aproximación es sólo válida cuando las ondas scattereadas son mucho más débiles que las ondas primarias, como es el caso de la tierra, cuando la velocidad y perturbaciones de densidad son relativamente pequeñas. Teoría de single-scattering, es conocida desde 1960, también como teoría de Chernov. La naturaleza del scattering depende fuertemente de la escala de longitud de las heterogeneidades y de las ondas sísmicas, que interactúan.

La teoría de scattering ha sido importante modelando scattering profundo de la tierra en términos de modelos de heterogeneidades aleatorios. Incluyendo interpretación de observaciones de precursores de PKP (por ejemplo [26]Haddon y Clearly, 1974;[16] Doornbos, 1976), precursores de PP ([33]King et al, 1975), y coda de Pdiff ([19] Earle y Shearer, 2001), la teoría de Born ha sido también usada para modelar variaciones de tiempos de viaje.

Si la energía en el campo de onda scattereado es una fracción significativa de la energía en la onda directa, entonces la aproximación de Born sería inexacta. Por lo tanto, debería ser usada una teoría de orden superior, que considere tanto la reducción de energía en la onda primaria, como el hecho de que las ondas scattereadas puedan experimentar más que un evento de scattering. Lo que resultaría en la utilización de *teoría de múltiple-scattering.*

Scattering sísmico ha sido considerado en distintos análisis y con distintos métodos. Heterogeneidades han sido determinadas a todas las profundidades, en el manto superior, en el CMB (frontera núcleo externo-manto), ICB (frontera núcleo externo-interno, ver figura 1.1) y profundidades cercanas a estos bordes.

En sismogramas registrados en distintas estaciones, el scattering producido puede influenciar la fase directa a través de reducción de amplitud y ensanchamiento del pulso. El campo de onda sísmico scattereado de una fase sísmica, es llamado “coda” de la fase (por ejemplo, coda de fase P, coda

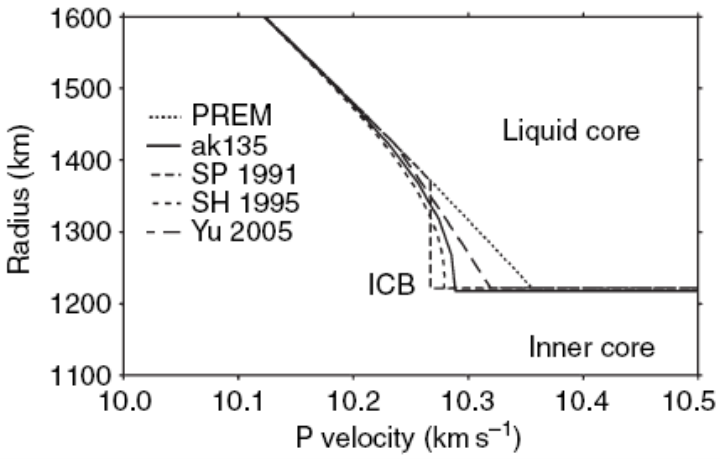

Figura 1.1: *Comparación de perfiles de velocidades en la base del núcleo externo para 4 modelos (PREM, Souriau y Poupinet (1991), Song y Helmberger (1995), y Yu et al. (2005)).*

de fase PKP, etc.), y es particularmente valioso para estudiar scattering de la tierra profunda. El scattering sísmico, por perturbaciones de velocidad de pequeña escala, está presente en la tierra, con la excepción hasta ahora del núcleo externo. Sin embargo la fuerza, escala de longitud, y dependencia de profundidad, aún no son resueltos. Particularmente en cercanías de CMB y ICB, donde puede haber contribuciones de irregularidades topográficas o estructura de borde de capa.

La coda de ondas sísmicas para altas frecuencias, está compuesta por ondas P y ondas S. Podemos enfocarnos en el estudio de codas de ondas S, al analizar eventos regionales y/o locales, debido a su gran amplitud y larga duración, comparada con la de ondas P, que se ve invadida por la llegada de onda S, para este caso. Sin embargo, en distancias telesísmicas, ondas P y su codas son más prominentes que ondas S en altas frecuencias, debido al efecto de atenuación del manto en las ondas de corte.

Estudios que intentan resolver el origen de ondas scattereadas y distinguir entre scattering cerca de la fuente, y cerca de la estación, han considerando, estaciones independientes como arreglos de estaciones.[1]Aki (1973) modeló scattering de ondas P, usando arreglos y aproximación de Born para single-scattering. Se enfocó en frecuencia de 0.5 Hz, alcanzando un buen ajuste para la data con un modelo arbitrario de heterogeneidades, con fluctuaciones de velocidad rms de 4 %. Para éste modelo, la presencia de scattering más fuerte, en altas frecuencias excedió límites de validez de aproximación de Born. [35]Shearer y Earle (2004) intentaron sistemáticamente caracterizar y modelar globalmente promedios de coda de P telesísmicas, de corto período. Este fue el primer intento para ajustar un set de datos globales de amplitudes de onda P y niveles de energía de coda con un modelo de conservación de energía, que especificó scattering y atenuación intrínseca en todas partes de la tierra. Examinando datos de la red global sísmica entre 1990 y 1999 en distancias fuente-receptor entre 10° y 100°. El método consideró suma de funciones envoltorias filtradas de 0.5 a 2.5 Hz, normalizado al máximo de amplitud de P. Forma de la coda fue notablemente diferente entre eventos superficiales y profundos como se ve en la figura 1.2.

Una fase particularmente sensitiva a heterogeneidades en el interior profundo de la tierra es Pdiff y su respectiva coda. Onda Pdiff contiene energía de P difractada alrededor de CMB (frontera núcleo externo-manto) y es observada en distancias mayores que 98°. La fase directa se ve claramente en frecuencias menores que 1 Hz y su coda puede ser detectada mas allá de 130° para frecuencias mayores que 1 Hz (por ejemplo,[19] Earle y Shearer, 2001). La coda de Pdiff es un tren de onda que emerge y luego decae lentamente y puede ser observado durante varios minutos, hasta ser interrumpido por

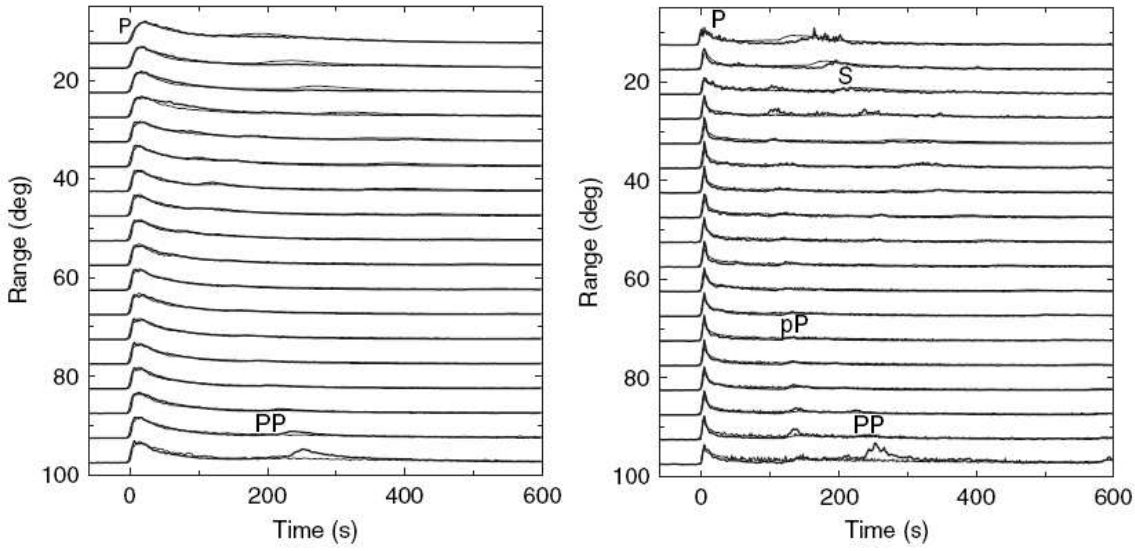

Figura 1.2: *Comparación de envoltorias, para eventos superficiales* $\leq 50km$ *(lado izquierdo) y profundos* $\geq 400km$ *(lado derecho) por [35]Shearer y Earle 2004.*

llegada de ondas PP y PKP.[29] Husebye y Madariaga (1970), concluyeron que coda de Pdiff no podría ser explicada como simple difracción de P en CMB o por reflecciones en el núcleo y sugirieron que sea producto de reflecciones o múltiples caminos en el manto bajo. Similar a la explicación propuesta para precursores de PP dado por [8] Bolt et al. (1968). Sin embargo, luego de trabajos posteriores fue mostrado esto improbable, considerando las grandes diferencias vistas entre observaciones de coda de onda P directa yendo hasta el interior profundo de la tierra y la coda de onda Pdiff. En 1990[3] Bataille et al. sugirió que coda de Pdiff era causada por múltiple-scattering cerca de CMB, propagándose a grandes distancias debido a la presencia de capas de baja velocidad dentro de D".

En 1996 [40]Tono y Yomogida, examinaron coda de Pdiff de cortos períodos, de terremotos registrados en distancias 103–120°, encontrando variaciones considerables en la aparición y duración de coda de Pdiff. Calcularon codas sintéticas, utilizando método de integral de borde de [5]Benites et al. (1992), y onda incidente en CMB, además de incluir modelos de múltiple scattering. Pero resultó que el modelo no se ajustó a algunas de las observaciones de Pdiff, lo que les sugirió que para tales casos una zona de baja velocidad sobre el CMB estaría canalizando la energía scattereada. Fuerte heterogeneidad y zonas de baja velocidad, de grosor variable han sido observadas en CMB ([20]Garnero 2000), pero aún no está claro si estos modelos pueden explicar observaciones de Pdiff. [4]Bataille y Lund en 1996, argumentaron un origen profundo para coda de Pdiff, comparando forma de ondas P (cerca de los 90°) y Pdiff (en 102°–105°). Encontraron que sus rangos observados de decaimiento de coda para una observación de Pdiff en 116°, podría ajustarse con un modelo de múltiple-scattering dentro de una cáscara 2-dimensional en el CMB. Haciendo un análisis con estaciones de banda ancha,[41] Tono y Yomogida en 1997, también indicaron un origen profundo de coda de Pdiff. [19]Earle y Shearer en el año 2001, aplicaron teoría de single-scattering para scatterers distribuidos uniformemente en el manto, generaron sintéticas para escala de longitud de 2 km y 1 % rms de variaciones de velocidad, obteniendo un buen ajuste para la amplitud y forma de onda. Para el caso de precursores de onda PP, observaciones ([34]Nguyen-Hai, 1963; [8]Bolt et al., 1968,[7] Bolt, 1970; [29]Husebye y Madariaga, 1970;[23] Gutowski y Kanasewich, 1974) concluyeron un alto nivel de reflecciones de discontinuidades en el manto bajo. En 1975 [11]Cleary et al., propusieron que precursores, resultan de scattering por heterogeneidades dentro y cerca de la corteza, evidenciada por tiempos de viaje y observaciones de

lentitud. Asimismo [33]King et al. (1975) modeló observaciones de precursores de arreglos sísmicos usando teoría de Born de single-scattering. Asumió variaciones de 1 % rms en propiedades elásticas, con longitud de escala de 12 km, modelo que predijo satisfactoriamente, tiempo de inicio, duración, y lentitud observados de precursores de PP. [44]Vinnik (1981) utilizó también teoría de single-scattering, pero considerando perturbaciones de velocidad rms en la litosfera de 1.6 %. Considerando la implicancia de lo anterior, quizá la evidencia más directa para scattering en el interior profundo de la tierra, viene de observaciones de precursores de la fase que pasa por el núcleo externo PKP, observadas inicialmente por [22]Gutenberg y Ritcher (1934). Estos precursores fueron vistos en registros a distancias fuente-receptor de entre 120° y 145°, llegando antes que fase PKP. Ellos son observados más fácilmente en altas frecuencias y emergen fuertemente usualmente en grandes distancias. Una hipótesis desacreditada en cuanto a esto, ha sido considerar su origen de refracciones en el núcleo interno ([21]Gutenberg, 1957), difracción de PKP desde el CMB ([9]Bullen y Burke-Gaffney, 1958; [14]Doornbos y Husebye, 1972), y refracción o reflección de PKP en capas de transición entre el núcleo interno y externo ([6]Bolt, 1962; [38]Sacks y Saa, 1969). Sin embargo ahora se entiende que precursores de PKP no son causados por estructuras radialmente simétricas, resultando scattering de heterogeneidades de pequeña escala en el CMB o dentro del manto inferior ([24]Haddon, 1972; [10]Cleary y Haddon, 1972). La interpretación de precursores de PKP en términos de scattering fue primero detallado por [24]Haddon (1972) y [10]Cleary y Haddon (1972). La primera evidencia a favor de este modelo es, la buena correlación entre los tiempos de inicio; observado y teórico, de precursores para scattering en CMB. Sin embargo, análisis de arreglos sísmicos (ejemplo, [12]Davies y Husebye, 1972; [14]Doornbos y Husebye, 1972;[15]Doornbos y Vlaar, 1973; [32]King et al., 1973,[31]1974; [28]Husebye et al., 1976;[16]Doornbos, 1976) también mostró que los tiempos de viaje y ángulos incidentes de los procursores eran consistentes con la teoría de scattering.

En 1974, [26]Haddon y Cleary, usaron teoría de single-scattering de Chernov para mostrar que las amplitudes de los precursores podrían ser explicadas con 1 % de heterogeneidades arbitrarias de velocidad, justo sobre el CMB. [15]Doornbos y Vlaar (1973), y [16]Doornbos (1976) argumentaron que la región de scattering se extiende a 600–900 km sobre CMB, y calcularon usando teoría de single-scattering que anomalías mucho mayores deben estar presentes. Sin embargo, [17]Doornbos en 1978, uso teoría de perturbación para mostrar que topografía de longitud de onda corta de CMB, podría también explicar las observaciones (ver [25]Haddon, 1982), como había sugerido también [26]Haddon y Cleary 1974. En 1988 [2]Bataille y Flatté, concluyeron que sus observaciones de precursores de PKP, podrían ser bien explicadas por perturbaciones de velocidad de 0.5–1 % rms en una capa de grosor de 200 km en la base del manto, por topografía de CMB con altura rms de ˜300 m (ver [3]Bataille et al., 1990).

Una dificultad al analizar resultados de estos anteriores estudios de precursores de PKP, es que no es claro cuantas de sus diferencias son debido, a imprecisiones en observaciones (es decir, selección de forma de estudio), o a diferencias en teoría y/o suposiciones de modelamiento. Amplitudes de precursores de PKP son bastante variables como lo notaron [2]Bataille y Flatté (1988), [3]Bataille et al. (1990), y [27]Hedlin et al. (1997), sugiriendo variaciones laterales en fuentes de scattering. En 1998 [43]Vidale y Hedlin, identificaron anomalías en la fuerza de precursores de PKP para camino de rayos, que indicó intenso scattering en cercanías de CMB. [45]Wen y Helmberger (1998) observaron precursores de banda ancha de PKP, las cuales modelaron como zonas de ultra baja velocidad (ULVZs) de 60–80 km, con saltos de velocidad de 7 %.

Otra fase sísmica del núcleo que provee información en scattering proveniente del interior profundo de la tierra, es la onda PKKP. Precursores para PKKP han sido observados dentro de 2 diferentes intervalos de distancias. Precursores PKKP (DF) en distancias fuente-receptor más allá de la caústica cerca de 125° son análogos a precursores de PKP. En rangos menores que 125°, PKKP(BC) precursores pueden resultar de scattering en topografía de CMB. Un estudio de precursores de PKKP(BC) fue llevado a cabo por [18]Earle and Shearer (1997), quienes tomaron una serie de sismogramas de alta

calidad de PKKP, obtenidos de Global Seismic Network (GSN) en distancias entre 80° y 120°. Fase PKKP es más fácilmente observada en altas frecuencias (evitando interferencia de coda de S de baja frecuencia), por lo que los registros eran filtrados con un filtro pasa-banda de entre 0.7 y 2.5 Hz. Los resultados mostraron que energía llega hasta 60 s antes que fase directa PKKP(BC) y que promedios de amplitudes de precursor aumenta gradualmente con el tiempo. [18]Earle y Shearer (1997) modelaron estas observaciones usando teoría de Kirchhoff para topografía de CMB de pequeña escala. Su modelo de mejor ajuste tuvo una longitud de escala de 8 km y amplitud rms de 300 m. Sin embargo ellos identificaron ajustes incorrectos entre codas observadas y sintéticas, dependiendo de amplitudes de precursor con distancia fuente-receptor. La aplicación de la teoría de Kirchhoff, predecía que amplitudes de precursores deberían crecer, pero esta tendencia no era aparente en muchas datas. [18]Earle y Shearer (1997) y [36]Shearer et al. (1998) exploraron posibles razones para esta discrepancia entre observaciones de precursores de PKKP(BC) y predicciones de modelos de topografía de CMB. Consideraron el ICB como parte de una explicación para el problema anterior. Especularon luego de trabajar con teoría de single-scattering, que algún modelo de múltiple-scattering podía ser capaz de explicar las observaciones. Quizá considerando una zona de baja velocidad sobre CMB, similar al propuesto para explicar coda de Pdiff, por [3]Bataille et al. (1990), [40]Tono y Yomogida (1996), y [4]Bataille y Lund (1996).

Una fase que va hasta el núcleo interno es la denotada por PKiKP, esta fase reflejada en el núcleo interno es de amplitud relativamente baja y observaciones de estaciones son poco claras, particularmente en distancias fuente-receptor menores que 50°. En el 2000 [42]Vidale y Earle examinaron 16 eventos en rango entre 58°-73° registrados entre 1969 y 1975, figura 1.3 muestra lentitud versus tiempo de data filtrada en 1 Hz, revelando unos 200 s de tren de onda largo con un tiempo de inicio y lentitud de acuerdo con lo predicho para PKiKP. Ellos atribuyeron esta energía a scattering del núcleo interno, ya que llegó con una lentitud claramente diferente comparada con la llegada tardía de coda de P. El tren de onda de PKiKP toma 50 s para alcanzar su peak de amplitud y promedios sobre 2 % de la amplitud de PcP. Se vió que PKiKP directa era apenas visible, con una amplitud cerca de su valor esperado, que es pequeño porque coeficiente de reflección de ICB tiene un nodo en distancias cerca de 72° (ejemplo, [37]Shearer and Masters, 1990). [42]Vidale y Earle en el 2000, ajustaron sus observaciones con cálculos sintéticos usando teoría de single-scattering. Esto aplicado a un modelo de heterogeneidades arbitrarias en el núcleo interno con variaciones rms de 1.2 % en densidad y los parámetros de Lamé (λ y μ) y una distancia de correlación de 2 km, asumiendo un modelo de autocorrelación exponencial.

Scattering por heterogeneidades a pequeña escala, han sido detectadas en todas las profundidades dentro de la tierra con la excepción de hasta ahora, por ejemplo del núcleo externo (al ser líquido y tener T° muy alta) donde existe una baja resolución. Es posible, que mediante este estudio se encuentre alguna evidencia de scattering producido en el núcleo externo, lo que implicaría que la interacción del fuerte campo magnético terrestre con las ondas sísmicas generaría scattering observable. Esto de ser así tendría un fuerte impacto en modelos ya existentes del núcleo externo.

Es importante entender el espectro de las heterogeneidades del interior de la Tierra. Por ejemplo, comparando distintas metodologías, se ha encontrado que en el manto superior la distribución de heterogeneidades cumple una ley de potencia ("power-law") con un índice de entre 2 y 3, que pueden ser explicadas por fluctuaciones de temperatura. Sin embargo, para heterogeneidades del manto inferior este índice crece a un valor de 5, para longitudes entre 300–20 km. Esta características del espectro no puede ser explicado por fluctuaciones de temperatura, por lo que fluctuaciones de composición o reacciones químicas u otro sería responsable.

Mi idea en este estudio es poder extender el espectro a longitudes de heterogeneidades en el manto inferior de 2 km, y en el núcleo a 1 km., lo que aportará para entender el origen de las heterogeneidades, en el manto inferior y/o núcleo externo y/o núcleo interno, y su relación con modelos geoquímicos y de convección.

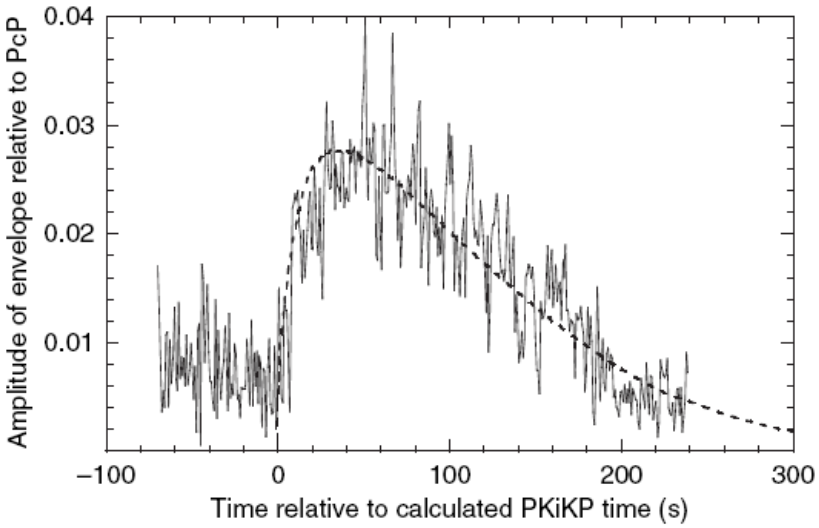

Figura 1.3: *Coda de PKiKP observada (línea ondulada) y modelada (línea segmentada) por [42]Vidale y Earle (2000).*

El hecho de modelar en forma conjunta todas las ondas que interactúan con el núcleo, provee de una visión consistente y global de las heterogeneidades. Esto es ya un aporte importante, debido a que la mayoría de los estudios se refieren a fases aisladas, que algunas veces implican condiciones que son incompatibles entre sí, respondiendo bien a una determinada data, pero no ajustándose a otra.

Nuestro estudio se enfoca en un evento profundo de 630 km y de magnitud 8.3, ocurrido en Bolivia en 1994, donde se ve claramente un buen registro de coda de altas frecuencias (4–9 Hz), en estaciones a distancias entre 114°–159°.

Los estudios anteriores, se han enfocado en el estudio de la coda: (a) en el entorno de 1 Hz, y (b) para cada onda por separado. El que estudiemos codas de frecuencias de 9 Hz, nos dará un incremento en la escala de heterogeneidades que uno puede detectar. Esto analizado la interacción de ondas sísmicas PKIKP, PKP, y PP de altas frecuencias, con las heterogeneidades del interior de la Tierra. De manera simultánea para ondas que son scattereadas en el manto, scattereadas en el núcleo externo, y las que se scatterean en el núcleo interno.

Como la distribución de heterogeneidades del interior de la Tierra, es un reflejo de los procesos dinámicos que actúan en ella. El poder determinar las características muy finas, hasta ahora no estudiadas, podrían aportar a la comprensión de los procesos dinámicos que actúan en el interior. Por lo tanto, se podría distinguir como las distintas regiones, poseen diferentes características, en cuanto a composición y procesos dinámicos existentes.

Si heterogeneidades determinadas, por ejemplo, son representadas por variaciones de densidad muy grandes, entonces estas no pueden ser producto de variaciones de temperatura, si no de composición química de los materiales, no siendo la convección para este caso el proceso principal. Así valores de variaciones inferidos de la sismología, imponen restricciones sobre modelos geodinámicos, relacionados a procesos de convección, estratificación, flujo de calor, transiciones de fase, etc.

El estudiar un evento de la magnitud y profundidad del de Bolivia, nos da suficiente información en la banda de frecuencia de 4–9 Hz, disponible en distancias epicentrales, que garantizan buena señal para las distintas ondas que interactúan con el núcleo: P, PKP, PKIKP. Esto implica que podemos resolver escalas más pequeñas de heterogeneidades de lo que se conoce hoy, y por lo tanto inferir la estructura del interior terrestre, utilizando teoría de “single scattering”.

Capítulo 2

Teoría

La sismología es una herramienta fundamental en el estudio de la tierra profunda. Estos estudios se basan en la utilización de sismología, debido a que permite hacer inferencias sobre ciertas propiedades elásticas (velocidad, densidad) del material del interior de la tierra. A medida que ondas se propagan, interactúan con el medio, lo que nos lleva a la determinación de la estructura dentro de la tierra. Existen otras herramientas o metódos para estudiar el interior de la tierra, tales como el estudio de rocas superficiales, momentos de inercia, geomagnetismo, cosmoquímica, pero ninguno da resultados con tanta resolución como la sismología. Existe en la red mundial una gran cantidad de datos geofísicos, con los que se puede inferir propiedades elásticas de la tierra para entender su constitución y dinámica.

2.1. Ondas sísmicas

Los terremotos irradian ondas sísmicas con períodos de décimas de segundos hasta varios minutos. Para éstos períodos de tiempo las rocas se comportan como sólidos elásticos. Sólidos elásticos permiten una variedad de tipos de ondas y esto hace que el movimiento del suelo después de un terremoto o una explosión (denominado evento) sea bastante complejo. Hay 2 tipos básicos de ondas elásticas: las ondas P (primarias), son ondas longitudinales o compresionales, lo que significa que el suelo es alternadamente comprimido y dilatado en la dirección de la propagación. Ondas P viajan a una velocidad aproximada de 1.73 veces mayor que las ondas S y pueden viajar a través de cualquier tipo de material líquido o sólido, por lo tanto por todo el interior terrestre. Ondas S (secundarias) son ondas en las cuales el desplazamiento es transversal a la dirección de propagación. La velocidad de las ondas S es menor que la de las ondas primarias. Debido a ello, estas aparecen en la superficie tiempo después que las ondas P. Ondas S generan oscilaciones durante el movimiento sísmico y producen la mayor parte de los daños. Sólo viajan a través de elementos sólidos, por lo que no pasan por el núcleo externo. La combinación de los dos tipos de ondas en la presencia de una superficie, como el de la tierra, puede conducir a otros tipos de ondas, dos de cuales son importantes para la geofísica: ondas de Rayleigh y Love, estas son las ondas superficiales.

Onda de Rayleigh contiene movimiento compresional, a diferencia de las de Love. Ellas viajan más despacio que las ondas P y S, por lo que llegan más tarde y tienen grandes amplitudes ya que viajan a lo largo de la superficie terrestre. Ondas sísmicas son reflejadas y refractadas de discontinuidades en la tierra, agregando una complejidad enorme a la llegada de un tren de ondas, con ondas llegando en muchos tiempos y direcciones diferentes. La superficie de la tierra es un reflector eficiente, y la tierra es esféricamente dividida en capas y estas capas producen aun más reflexiones.

La complejidad de la ondas sísmicas a su vez es una gran ventaja, debido a que permite determinar caracteristicas de la estructura dentro de la tierra. Determinando por ejemplo las zonas principales dentro de la tierra: corteza, manto, núcleo externo e interno (figura 2.1). Capas internas son separadas

por interfaces donde ondas sísmicas son reflejadas.

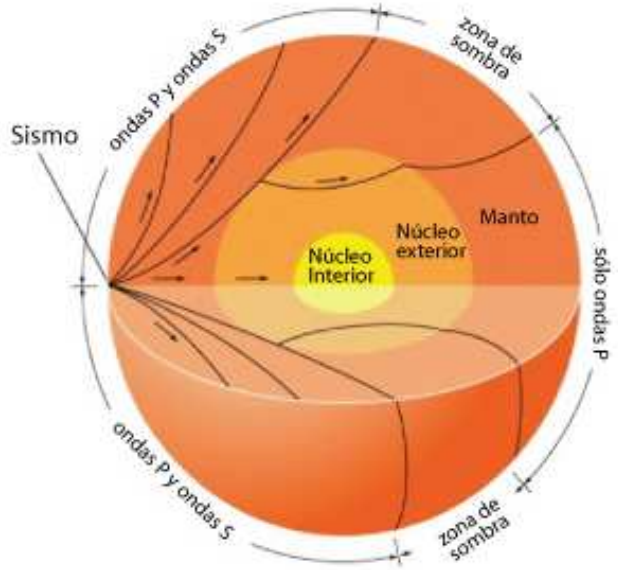

Figura 2.1: *Capas sísmicas principales en el interior de la tierra: corteza, manto y núcleos. El núcleo externo es líquido y no trasmite ondas de corte, S.*

Dentro de cada capa la velocidad de las ondas sísmicas en general aumenta y por lo tanto son refractadas de modo que los rayos son cóncavos hacia la superficie de la tierra. El núcleo externo es líquido con más baja velocidad sísmica que el manto solido y rayos son refractados abajo en esta zona, formando una zona de sombra no alcanzada por llegadas directas como se ve en la figura 2.1 y 2.2. Las diferentes zonas dentro de la tierra conducen a una estructura de rayos muy compleja. Los rayos de ondas P se muestran en la Figura 2.2 y existe una convención de nombres para todos los rayos que viajan por el interior terrestre tomando en cuenta las reflexiones y refracciones en las interfaces.

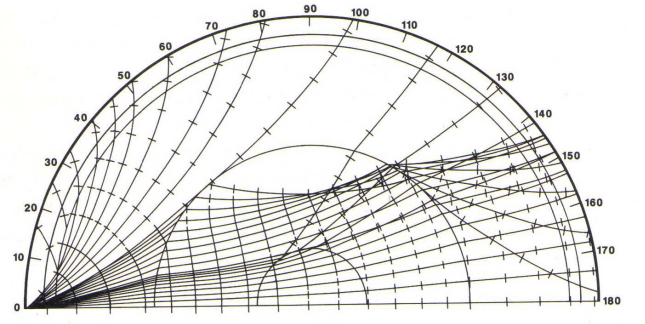

Figura 2.2: *Ondas sísmicas viajando en el interior de la tierra. Velocidad sísmica aumenta con la profundidad a excepción del núcleo donde velocidad es menor.*

Ondas compresionales en el manto son denotadas por P, en el núcleo externo por K, y en el núcleo interno por I. Así por ejemplo PKP será una onda compresional viajando a través del manto al núcleo externo y hacia la superficie. Si conocemos como varía la velocidad sísmica con la profundidad en la tierra, entonces podemos calcular los tiempos de viaje de rayos entre un evento sísmico (terremoto) y

una estación, usando aproximación de teoría de Rayos. La velocidad sísmica dentro de la tierra, para su utilización en sismología, está resumido en diversos modelos, de los cuales nos enfocaremos en el de Iaspei ([30]Iaspei 1991, seismological tables), de velocidad dependiente del radio.

2.2. Ecuación de movimiento

Las fuerzas de superficie son calculadas por unidad de área y son llamadas tracciones. Para definir las tracciones debemos tener la fuerza por unidad de área, y además la orientación de la superficie sobre la cual actúa. Esto se hace usando el tensor de esfuerzo σ. Así para una superficie con normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ tenemos $T_i = \sigma_{ji}\hat{n}_j$

Podemos resumir la tracción a una fuerza total que actúa sobre todo el volumen como

$$F_i = \oint_{\partial V} T_i dS = \oint_{\partial V} \sigma_{ji}\hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \tag{2.1}$$

integral sobre el volumen V como resultado de utlizar el teorema de la divergencia. La ecuación (2.1) muestra que las tracciones de superficie pueden ser convertidas en fuerzas de cuerpo equivalente, tomando la divergencia del tensor de esfuerzo. El momentum es $\int_V \rho \mathbf{v} dV$, y la fuerza aplicada es la suma de las fuerzas de cuerpo, $\mathbf{f}$, y tracciones de superficie, $\mathbf{T}$, de la forma

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v_i dV = \oint_{\partial V} \sigma_{ji}\hat{\mathbf{n}} dS + \int_V f_i dV \tag{2.2}$$

Transformando la integral de superficie por el teorema de divergencia resulta

$$\int_V \left(\rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - f_i \right) dV = 0 \tag{2.3}$$

integral aplicada a un volumen arbitrario V, el integrando es 0, y

$$\rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \tag{2.4}$$

es llamada ecuación de movimiento de Cauchy.

Medios isotrópicos tienen tensores de elasticidad, forma general es la ecuación (2.5 (a)).

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{2.5}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

con tensor de deformación $e_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$, y λ y μ funciones escalares de posición, llamados *parámetros de Lamé*. Un sólido elástico, es dicho homogéneo si los elementos del tensor de elasticidad son independientes de la posición; isotrópicos si ellos son independientes de la dirección. Medios homogéneos tienen constante C. La forma general de la ley constitutiva para elasticidad lineal es la Ley de Hooke (ecuación 2.5 (b)). Utilizando ecuaciones (2.5) da ley de Hooke para un sólido isotrópico

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{2.6}$$

La variación de las constantes de Lamé con la profundidad dentro de la tierra es una importante inhomogeneidad.

Usando ley de Hooke en la forma de la ecuación (2.6), resulta

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\right) + \mu\left(\nabla^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla \cdot \mathbf{u}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial x_j}e_{ij} \tag{2.7}$$

Se puede usar la notación vectorial $\nabla\mu \cdot e$ para denotar la contracción de e con $\nabla\mu$ sin ambiguedad porque e es simétrico. La divergencia del tensor de esfuerzo es entonces

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \left[\nabla\left(\lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\right) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mu\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) + 2\nabla\mu \cdot e\right]_i \tag{2.8}$$

Entonces reemplazando $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ por $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ en ecuación (2.4) queda de la forma

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla\left(\lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\right) + 2\nabla\mu \cdot e + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mu\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) \tag{2.9}$$

Es llamada ecuación de Navier; que gobierna pequeños desplazamientos.

2.3. Propagación de ondas en un medio homogéneo

Consideramos el caso de propagación de onda en un medio homogéneo. Tomamos ρ, λ y μ como constantes en ecuación de Navier (2.9)

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \left(\lambda + \mu\right)\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) + \mu\nabla^2\mathbf{u} \tag{2.10}$$

Usando la identidad, válida para cualquier vector,

$$\nabla^2\mathbf{u} = \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \tag{2.11}$$

ecuación (2.10) queda entonces de la forma

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \left(\lambda + 2\mu\right)\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \tag{2.12}$$

Podemos separar ecuación (2.12) en dos ecuaciones, una gobernada por la compresión (cambios de volumen) y la otra por el cizalle.

Cualquier vector puede ser separado en potenciales escalar y vectorial. Entonces escribimos el desplazamiento como

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi} \tag{2.13}$$

Φ y $\mathbf{\Psi}$ son llamados *potenciales elástodinamicos.*

Aplicamos divergencia a ecuación (2.13), y utilizamos identidad vectorial $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}$, entonces (2.13) queda

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla^2\Phi \\ \theta &\equiv \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \theta &= \nabla^2\Phi \end{aligned} \tag{2.14}$$

con θ, potencial para la compresión, Φ es el potencial para las ondas P. Podemos obtener de (2.12), la ecuación para el potencial de dilatación

$$\rho\ddot{\theta} = \left(\lambda + 2\mu\right)\nabla^2\theta \tag{2.15}$$

Ecuación de onda de θ gobierna ondas P. Cambio en volumen es caracteristica principal de onda P.

Aplicamos rotor a ecuación (2.13), y utilizamos identidad $\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi} =\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{\Psi}\right)-\nabla^2\mathbf{\Psi}$, resultando

$$\nabla\times\mathbf{u}=\nabla\times\nabla\Phi+\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}=\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{\Psi}\right)-\nabla^2\mathbf{\Psi} \tag{2.16}$$

tenemos de ecuación (2.13) tres variables independientes al lado izquierdo, cuatro al lado derecho, y entonces una variable dependiente.

Elegimos como condición para variable dependiente $\nabla\cdot\mathbf{\Psi}=0$. De esta forma ecuación (2.16) resulta de la forma,

$$\mathbf{w}\equiv\nabla\times\mathbf{u}=-\nabla^2\mathbf{\Psi} \tag{2.17}$$

Obtenemos así de (2.13) ecuación de $\mathbf{w}$ que gobierna ondas S

$$\rho\ddot{\mathbf{w}}=\mu\nabla^2\mathbf{w} \tag{2.18}$$

siendo el movimiento de partículas de ondas S, un movimiento de cizalle.

La ecuación general de desplazamiento (2.12), contiene dos ecuaciones de onda por separado. En general el desplazamiento puede ser separado en un desplazamiento de ondas *P*, $\mathbf{u_P}$ y uno de onda *S,* $\mathbf{u_S}$,

$$\mathbf{u}=\mathbf{u_P}+\mathbf{u_S} \tag{2.19}$$

donde

$$\mathbf{u_P}=\nabla\Phi \tag{2.20}$$

$$\mathbf{u_S}=\nabla\times\mathbf{\Psi}$$

Con esta definición de movimiento de P y S, vemos que las ondas P no tienen rotación, mientras que las ondas S no tienen cambio en el volumen, su movimiento es de cizalle.

2.4. Propagación de ondas en un medio inhomogéneo

En la realidad los medios no son homogéneos, y el interior terrestre no es la excepción. El interior de la tierra posee variaciones que se pueden separar en dos grupos: (a) Pequeñas variaciones, $\delta\rho\ll\rho$, tratadas mediante Teoría Rayos (variaciones suaves) (b) Variaciones con longitudes de onda grandes (variaciones aleatorias), resueltas utilizando scattering.

2.4.1. Teoría de rayos

Ecuación Eikonal

En la sección anterior se derivó la existencia de las ondas P y S, introducidos en un medio elástico homogéneo. Consideramos ondas P para las siguientes deducciones. Las ondas P y S son conocidas como ondas de cuerpo, porque se propagan en el interior de un medio continuo. Los rayos se definen como la normal al frente de onda y, por tanto apuntan en la dirección de propagación. En el caso de una onda plana, los rayos son una familia de rectas paralelas, en el caso de una onda esférica, los rayos son

los que se irradian desde la fuente sísmica. Rayos proporcionan un medio conveniente de seguimiento de un frente de onda en expansión, y nos dan un marco intuitivo para ampliar las soluciones de ondas elásticas desde medios homogéneos a inhomogéneos. Si inhomogeneidad en la velocidad no es caótica, entonces los rayos correspondientes a las ondas P o S se comportan muy parecido a como hace la luz viajando a través de materiales de diferentes índices de refracción.

Vamos a aproximar nuestras soluciones de desplazamiento para extraer el comportamiento de los rayos, ya que no podemos describir todos los fenómenos de ondas. Estas aproximacion se conoce como *teoría de rayos* y son la base para la interpretación de ondas de cuerpo sísmicas. En la óptica clásica, la geometría de una superficie de onda se rige por el principio de Huygens, que establece que cada punto de un frente de onda puede ser considerado la fuente de una onda secundaria pequeña que viaja hacia fuera en todas las direcciones hacia adelante con la velocidad del medio en ese punto. Dada la ubicación de un frente de onda en cierto instante en el tiempo, podemos predecir futuras posiciones del frente de onda. Las porciones del frente de onda que se encuentran en material de alta velocidad producen ondas que viajan más lejos en un intervalo de tiempo dado, que las producidas por puntos en un material de baja velocidad. Esto provoca una dependencia temporal en la forma del frente de onda. Debido a que los rayos son normales al frente de onda, los rayos también cambiarán con el tiempo. Vamos a considerar las aproximaciones que se deben hacer a las soluciones de onda elástica. Recordemos la ecuación para una onda plana de la forma

$$\phi = Ae^{i(\pm wt \pm \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{2.21}$$

donde $\mathbf{k}$ es un vector que apunta en la dirección de propagación, y por definición un rayo. Para material homogéneo, $\mathbf{k}$ no cambia según como se propaga la onda (es una línea recta). Ahora bien, si la velocidad sísmica varía suavemente en el espacio (es decir, ρ, λ y μ tienen pequeños gradientes), debemos resolver ecuación ([39] ver Thorne Lay, Modern Global Seismology):

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{2.22}$$

esta ecuación de onda es una aproximación de la ecuación del movimiento para medios heterogéneos. Resolveremos esta ecuación diferencial parcial, asumiendo una forma funcional de ϕ de la forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x})\, e^{iw(W(\mathbf{x})/c_0 - t)} \tag{2.23}$$

A y W son reales, donde $\frac{W(\mathbf{x})\cdot w}{c_0}$, que reemplaza a $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$, es una función de posición, y c_0 es una velocidad de referencia. Sustituyendo (2.23) en (2.22) resulta

$$\nabla^2\left[A(\mathbf{x})\, e^{iw\left(\frac{W(\mathbf{x})}{c_0} - t\right)}\right] = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[A(\mathbf{x})\, e^{iw\left(\frac{W(\mathbf{x})}{c_0} - t\right)}\right] \tag{2.24}$$

Una de las derivadas espaciales requeridas, por ejemplo, $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}$ es

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_1} e^{iw\left(\frac{W(\mathbf{x})}{c_0} - t\right)} + A(\mathbf{x})\,\frac{iw}{c_0}\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1} e^{iw\left(\frac{W(\mathbf{x})}{c_0} - t\right)}\right\} \tag{2.25}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 A(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} - \frac{w^2 A(\mathbf{x})}{c_0^2}\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)^2 + i\left(\frac{2w}{c_0}\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_1}\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1} + A(\mathbf{x})\,\frac{w}{c_0}\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)\right] e^{iw\left(\frac{W(\mathbf{x})}{c_0} - t\right)}$$

Para $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}$ y $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}$, obtenemos similares ecuaciones con partes reales e imaginarias. Igualando las partes real e imaginaria en la ecuación (2.24) da dos conjuntos de ecuaciones:

$$\nabla^2 A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})\frac{w^2}{c_0^2}\left[\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right)^2\right] = \frac{-w^2}{c^2(\mathbf{x})}A(\mathbf{x}) \tag{2.26}$$

$$\left[\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_2}\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_3}\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right] + A(\mathbf{x})\nabla^2 W(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.27}$$

Se puede reordenar los términos de ecuación (2.26) como

$$\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{c_0^2}{c(\mathbf{x})^2} = \frac{c_0^2}{A(\mathbf{x})w^2}\left(\nabla^2 A(\mathbf{x})\right) \tag{2.28}$$

El lado derecho de esta ecuación es la razón del laplaciano espacial de la amplitud a la amplitud por w^2. Para altas frecuencias (longitudes de onda pequeña) este término es pequeño, aproximadamente igual a cero, y ecuación (2.28) se reduce a

$$\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{c_0^2}{c(\mathbf{x})^2} \tag{2.29}$$

esta es llamada la *ecuación Eikonal*. Soluciones de la ecuación Eikonal no son soluciones exactas para la ecuación de onda, pero para muchas regiones dentro de la tierra real, las restricciones necesarias en variaciones espaciales de los parámetros elásticos son cumplidos, por lo que las soluciones de la ecuación Eikonal son útiles.

Recordemos que consideramos la similitud de $\frac{W(\mathbf{x})\cdot w}{c_0}$ con $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$, donde $\mathbf{k}$ es un vector normal al frente de onda, o un rayo. La ecuación Eikonal es por lo tanto una ecuación diferencial parcial que relaciona los rayos con la distribución de velocidad sísmica. La condición necesaria para que la teoría de rayos geométricos sea una aproximación útil de la ecuación de onda, es que la variación en el gradiente de $A(\mathbf{x})$ sobre una longitud de onda debe ser mucho más pequeño que $A(\mathbf{x})$. Se define una longitud de onda de referencia:

$$\lambda_0 = c_0\frac{2\pi}{w} \tag{2.30}$$

para que se cumpla (2.29), se requiere que $\lambda_0^2\left(\frac{\nabla^2 A(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})}\right) \ll \nabla W(\mathbf{x})\cdot\nabla W(\mathbf{x})$. Esto da

$$\lambda_0^2\frac{\nabla^2 A(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})} \ll \frac{c_0^2}{c(\mathbf{x})^2} \tag{2.31}$$

Para heterogeneidades débiles$\frac{c_0^2}{c(\mathbf{x})^2}$ debe ser ~ 1. Por lo tanto

$$\lambda_0^2\frac{\nabla^2 A(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})} \ll 1 \tag{2.32}$$

Es posible usar un análisis de escala para añadir la idea física en esta ecuación. De ecuación (2.29), vemos que $\nabla W(\mathbf{x})\cdot\nabla W(\mathbf{x}) = \frac{c_0^2}{c(\mathbf{x})^2}$, implica $\nabla W(\mathbf{x}) \approx \frac{c_0}{c(\mathbf{x})}$. De ecuación (2.27), podemos escribir

$$\nabla^2 W(\mathbf{x}) \approx \nabla W(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla A(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})} \tag{2.33}$$

o

$$\frac{\nabla A(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})} \approx \frac{\nabla^2 W(\mathbf{x})}{W(\mathbf{x})} \approx \frac{\nabla\left(\frac{c_0}{c(\mathbf{x})}\right)}{\frac{c_0}{c(\mathbf{x})}} \approx \frac{\nabla c(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})} \tag{2.34}$$

Si además de calcular el gradiente sobre una longitud de onda se multiplica por λ_0^2, se puede utilizar ecuación (2.32) para encontrar

$$\frac{\lambda_0^2 \nabla^2 A(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})} \approx \frac{\lambda_0 \delta[\Delta c(\mathbf{x})]}{c(\mathbf{x})} \ll 1 \tag{2.35}$$

que establece que la ecuación Eikonal se aproximará bien a la ecuación de onda, si la variación relativa del gradiente de velocidad sobre una longitud de onda sísmica, es pequeña en comparación con la velocidad.

Pareciera ser que la ecuación Eikonal (2.29) es compleja y no parece que sea más fácil de tratar que la ecuación de onda. Sin embargo, veremos que podremos deducir de manera mas simple ecuaciones para rayos desde la ecuación eikonal. El concepto de rayos es sumamente importante y es la base de la interpretación de ondas de cuerpo. Rayos nos permiten realizar un seguimiento del pulso de desplazamiento desde una fuente a un receptor, que considera propiedades localizadas sobre el camino específico. Las condiciones de validez requieren longitudes de onda más pequeñas que unos cientos de kilómetros y velocidades sísmicas variando lentamente, criterios que se aplica a la mayoría de las ondas de cuerpo en el interior profundo de la tierra. Condición (2.35) no es válida en presencia de fuertes gradientes de velocidad, pero se puede convertir el problema en una serie de regiones discretas donde las representaciones de rayos son suficientes. Este argumento muestra que, lejos de cambios bruscos de velocidad, ondas P se propagarán sin acoplar a ondas S, según la ecuación de onda.

Representando una porción de un campo de onda sísmica como un rayo da a lugar al concepto de fases sísmicas. Estas corresponden a perturbaciones transitorias a un receptor, ondas P o S, que han recorrido un camino definido entre la fuente sísmica y el receptor. Estas llegadas tienen dos características principales: *el tiempo de viaje y amplitud*. La ecuación Eikonal y sus extensiones pueden ser utilizados para cuantificar estos dos parámetros.

Parámetro de rayo y rayos sísmicos

Considere la superficie de onda tridimensional mostrada en la figura 2.3. El rayo, que es normal al frente de onda, $W(x)$, es caracterizado por viajar una longitud de arco s, en un tiempo, t. La direcciones cosenos asociados con el rayo se dan por $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$, $\frac{dx_3}{ds}$ y deberán satisfacer

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 = 1 \tag{2.36}$$

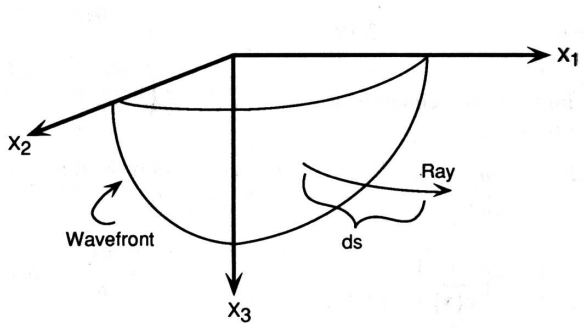

Figura 2.3: *Frente de onda tridimensional, con un rayo o normal con longitud ds.*

Consideramos la relación física entre s y $W(\mathbf{x})$: $\nabla W(\mathbf{x}) \propto s$, que es la afirmación que el gradiente de una función (superficie) es orientado normal a aquella función (superficie). Así podemos ver que $\frac{dx_i}{ds}$ debe ser proporcional a $\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_i}$. Esto implica que podemos reescribir (2.36) como

$$\left(a\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)^2 + \left(a\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right)^2 + \left(a\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right)^2 = 1 \tag{2.37}$$

donde a es una constante de proporcionalidad. Una comparación de (2.37) y ecuación Eikonal (2.29) muestra que (2.37) es la ecuación Eikonal si $a = \frac{c(\mathbf{x})}{c_0}$, o bien $a^{-1} = n = \frac{c_0}{c(\mathbf{x})}$, llamado comunmente el *índice de Refracción*. Ecuaciones (2.36) y (2.37) pueden ser combinados para dar las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} n\frac{dx_1}{ds} &= \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ n\frac{dx_2}{ds} &= \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ n\frac{dx_3}{ds} &= \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Ahora consideramos el hecho que las ecuaciones normales cambian a lo largo del camino del rayo. Tomando la derivada de las ecuaciones normales con respecto a ds

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx_1}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{n\left[\left(\frac{dx_1}{ds}\right) + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x_1}n \end{aligned} \tag{2.39}$$

La forma generalizada de esta ecuación se llama *ecuación de camino de rayo*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx_i}{ds}\right) &= \frac{\partial n}{dx_i} \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(\mathbf{x})}\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right) &= \nabla\left(\frac{1}{c(\mathbf{x})}\right) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden para $\mathbf{x}$, que es el camino de rayo; note que el camino de rayo es proporcional a la variación espacial en la distribución de velocidades. Dos condiciones iniciales controlan el comportamiento de (2.40): (1) la dirección en la que el rayo deja algún punto de referencia arbitrario $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right)|_{s_o}$ y (2) la posición del punto de referencia s_0.

Podemos deducir de (2.40) un parámetro de gran relevancia, considerando un ejemplo sencillo. Si seguimos un rayo a través de un material que tiene un cambio en la velocidad en una sola dirección, por ejemplo en profundidad, entonces $c = c(x_3)$, y así $n = n(x_3)$. Así $\frac{\partial n}{\partial x_1} = \frac{\partial n}{\partial x_2} = 0$. Entonces (2.40) se reduce a

$$n\frac{dx_1}{ds} = c_1 = constante \tag{2.41}$$

$$n\frac{dx_2}{ds} = c_2 = constante$$

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx_3}{ds}\right) = \left(\frac{dn}{dx_3}\right)$$

La razón de c_1 y c_2 limita el camino de rayo a un plano que es perpendicular al plano x_1x_2. En otras palabras, la proyección del rayo en el plano x_1x_2 es una línea recta (figura 2.4 muestra la geometría). Para mayor comodidad, y sin pérdida de generalidad, podemos elegir este plano, para que coincida con el plano x_1 x_3, reduciendo (2.41) a

$$n\frac{dx_1}{ds} = constante \tag{2.42}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx_3}{ds}\right) = \left(\frac{dn}{dx_3}\right)$$

En un punto dado, las direcciones cosenos del rayo son dadas por

$$l_1 = \frac{dx_1}{ds} = \sin i \tag{2.43}$$

$$l_3 = \frac{dx_3}{ds} = \cos i$$

Así

$$n\frac{dx_1}{ds} = \frac{c_0}{c}\sin i = constante \tag{2.44}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin i}{c} = constante = p$$

La constante p es llamada el *parámetro de rayo*. El ángulo i es el *ángulo de incidencia*, y da la *inclinación* de un rayo medido desde la vertical (dirección x_3) a cualquier profundidad determinada. Para un punto de referencia establecido y un ángulo de despegue, un rayo tendrá un parámetro de rayo constante, $r\sin i(r)/v(r) \equiv p$, para todo el trazado. Ecuación (2.44) es también conocida como la ley de Snell, para medios esféricamente simétricos.

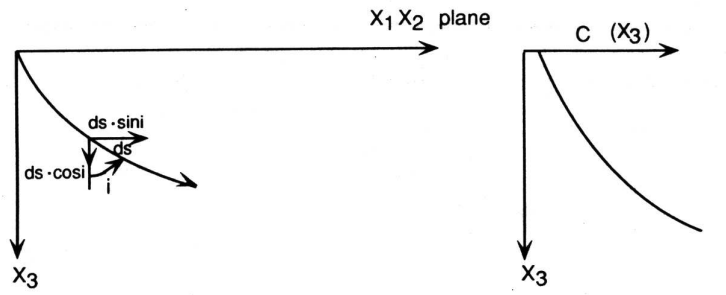

Figura 2.4: *Camino de rayo para un medio en el cual la velocidad es independiente de las direcciones* x_1 *y* x_2.

La cantidad conservada a lo largo del rayo es $r\ sin\ i\ /\ v$; caracteriza al rayo y se denomina *parámetro de rayo*, p. Para describir la propagación de ondas en un medio lateralmente inhomogéneo uno puede utilizar teoría de rayos para altas frecuencias. En óptica geometría un rayo es refractado de acuerdo a la ley de Snell. Consideramos refracción en el plano normal a la interferencia, que contiene el rayo incidente, y por lo tanto ángulos de refracción y de incidencia.

Considerando la refracción de rayos en un medio esféricamente simétrico, como el mostrado en figura 2.5. Cáscaras esféricas 1 y 2 tienen velocidad de onda v_1 y v_2 respectivamente. Un rayo que afecta al interfaz en A obedecerá la ley de Snell. El rayo también obedece la ley de snell en B, donde rayo va hacia afuera por la parte inferior de la cáscara 2. El nuevo ángulo de incidencia i_2 no es igual a j. Los dos ángulos están relacionados por geometría de triángulos AQC y BQC, de la forma

$$\sin j = \frac{QC}{AC} \tag{2.45}$$

$$\sin i_2 = \frac{QC}{BC}$$

Y por lo tanto

$$\sin j = \sin i_2 \frac{AC}{BC} \tag{2.46}$$

Tenemos $r_1 = AC$ y $r_2 = BC$, el radio de las 2 cáscaras. Entonces la ley de Snell puede ser escrita como

$$\frac{r_1 \sin i_1}{v_1} = \frac{r_2 \sin i_2}{v_2} \tag{2.47}$$

que es la cantidad conservada a lo largo del rayo. Se puede escribir

$$p = \frac{r \sin i}{v} \tag{2.48}$$

Parámetro de rayo p identifica un rayo viajando entre 2 puntos dentro de la tierra. De la ley de Snell, además, el rayo refractado yace en el plano conteniendo el rayo incidente y la normal al plano tangente a la interfaz. Implicando en medios esféricamente simétricos, que esto yace en un plano que contiene el centro de la esfera.

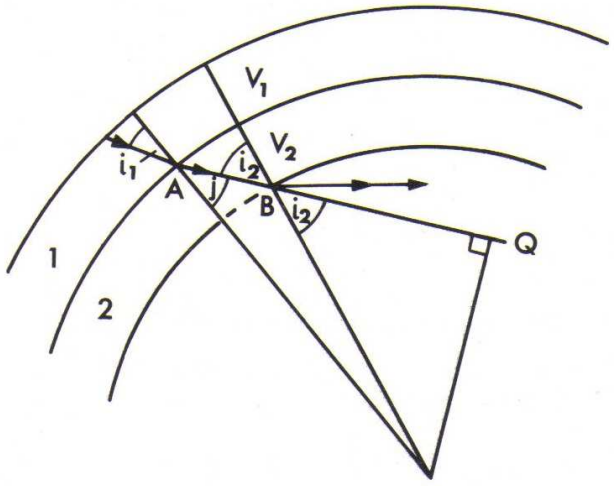

Figura 2.5: *Ley de Snell en medio esféricamente simétrico. Cáscaras esféricas 1 y 2 tienen velocidad de onda v_1 y v_2 respectivamente. Ley de Snell implica que $r\sin i/v$ es conservada a lo largo del camino de rayo.*

Podemos calcular el parámetro de rayo de un set de tiempos de viaje. Consideramos 2 rayos paralelos PP' y QQ' en figura 2.6, PN es normal a QQ' en N. $d\Delta$ es un aumento infinitesimal en la distancia angular Δ entre P y P'. El cambio en tiempo de viaje asociado con $d\Delta$ es

$$dT = \frac{2QN}{v} = \frac{2}{v}PQ\sin i = \frac{PC\sin i}{v}d\Delta \tag{2.49}$$

tenemos $PC = r$, el radio de la esfera en P, Q y P'. Entonces

$$p = \frac{r\sin i}{v} = \frac{dT}{d\Delta} \tag{2.50}$$

Así conociendo el tiempo T para un rango de distancias angulares Δ, tomamos diferencias para estimar la derivada y de ahí obtener el parámetro de rayo usando la ecuación (2.50). Ecuación (2.48) muestra que p tiene dimensiones de tiempo; es identificado con p en (2.50) si Δ es medido en radianes (esto fue asumido remplazando PQ por $\frac{1}{2}PCd\Delta$ en ecuación (2.49)). Conociendo el parámetro de rayo y la velocidad en función del radio, podemos calcular el ángulo de incidencia i en la superficie de la tierra y la profundidad máxima del rayo (donde $i = 90°$) de la ecuación (2.48). El punto más profundo se conoce como el *punto de retorno* del rayo o *punto minímo*. Diferencias entre datos de Δ y profundidad pueden ser usados para estimar $\frac{dT}{d\Delta}$ en una distancia determinada. Teniendo lo anterior y la velocidad de onda podemos encontrar el ángulo de incidencia en todas partes del interior terrestre.

Imagínemos por un momento que podemos ver a través de la tierra como si fuera de cristal, pero en vez de usar luz, se usan rayos sísmicos. Este es de algún modo el enfoque considerado con lo anterior. Y se puede conocer los parámetros necesarios para la obtención de la amplitud de una onda incidente. La amplitud de una onda de una fuente puntual en un medio homogéneo, disminuye con la distancia, a condición de que energía no sea perdida en la trasmisión. Esto es porque la energía es extendida uniformemente sobre el área del frente de onda, la cual es esférica y por lo tanto disminuye como el cuadrado de la distancia. Podemos hacer uso de los tiempos de viaje para calcular el efecto sobre la amplitud; esto depende sobre la segunda derivada del tiempo con respecto a la distancia.

En figura 2.7, H representa la posición de una fuente sísmica que emite energía $I(i, \phi)$ por unidad de ángulo sólido, donde ángulo ϕ mide la rotación sobre el eje HC. HS y HS' son dos rayos que definen

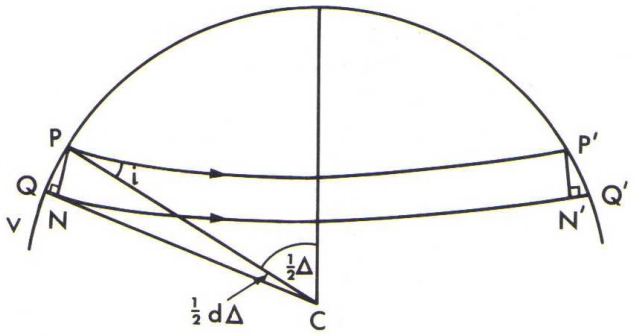

Figura 2.6: *Derivación de la ecuación para el parámetro de rayo,* $p = \frac{dT}{d\Delta}$.

los trazos de rayos cruzando la superficie en SS'. Consideramos i_2 y ϕ como dos ángulos definiendo un sistema de coordenada esférico con centro H y polo C. Haciendo girar el plano entero en la figura 2.7 sobre el eje HC por un ángulo $d\phi$, barremos hacia afuera el ángulo $\sin i \; di \; d\phi$, y la línea SP barrerá un área de frentes de onda $r_1 SP \sin\Delta \; d\phi = r_1 SS' \sin\Delta \cos i_1 d\phi = r_1^2 \sin\Delta \cos i_1 \; d\Delta \; d\phi$.

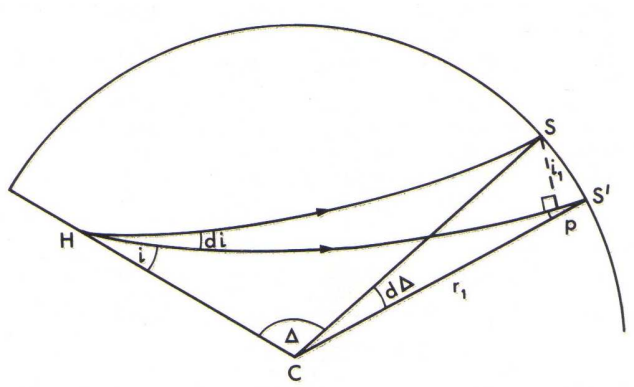

Figura 2.7: *Extensión geométrica. La energía por unidad de área de frentes de onda, depende de la refracción de los rayos.*

La energía por unidad de área de un frente de onda, es por lo tanto

$$e(\Delta) = \frac{I \sin i}{r_1^2 \sin\Delta \cos i_1} \left| \frac{di}{d\Delta} \right| \tag{2.51}$$

Combinando ecuaciones (2.48) y (2.50) para el parámetro de rayo

$$\sin i = \frac{v}{r} \frac{dT}{d\Delta} \tag{2.52}$$

Donde v y r aplicado en H, y diferenciando con respecto a Δ resulta:

$$\cos i \frac{di}{d\Delta} = \frac{v}{r} \left| \frac{d^2T}{d\Delta^2} \right| \tag{2.53}$$

De ecuación (2.51), tenemos

$$e(\Delta) = \frac{I \tan i}{r_1^2 \sin \Delta \cos i_1} \frac{v}{r} \left| \frac{d^2T}{d\Delta^2} \right| \tag{2.54}$$

Así con curva de tiempo de viaje $T(\Delta)$, modelo de velocidad $v(r)$, e I intensidad incidente podemos estimar el efecto de refracción en la amplitud de una onda llegando a alguna distancia. Diferenciando el tiempo de viaje para obtener primero $\frac{dT}{d\Delta}$, entonces $\frac{d^2T}{d\Delta^2}$. Y encontrando i y $i1$ de ecuación (2.52), tendremos la energía por unidad de área de ecuación (2.54) y así la amplitud de la forma

$$A(\Delta) = \left(\frac{I \tan i}{r_1^2 \sin \Delta \cos i_1} \frac{v}{r} \left| \frac{d^2T}{d\Delta^2} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.55}$$

Para aplicaciones se necesita conocer exactamente donde ha ido el rayo. Calcular el camino de rayo, o trazado de rayo, en un medio complicado es un problema numérico difícil. Para medios esféricamente simétricos esto requiere de una integral. Se necesita considerar el problema por ahora en 2 dimensiones. Dentro del plano el camino de rayo es especificado como una función la $\Delta(r)$, donde Δ es la distancia angular de algún punto de referencia y r es el radio.

Figura 2.9 muestra que $\Delta(r)$ (en figura $\theta(r)$) satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\Delta}{dr} = \frac{1}{r \left(\frac{r^2}{p^2 v^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.56}$$

Si v es una función conocida de r, podemos integrar ecuación (2.56) dado $\Delta(r, p)$ para cualquier elección de parámetro de rayo p. El rayo es simétrico con respecto a su punto mínimo o de retorno $(r_{0,}\Delta_0)$, y por lo tanto esto es necesario para encontrar una mitad del camino de rayo,

$$\Delta(r, p) = \int_{r_0}^{r} r^{-1} \left(\frac{r^2}{p^2 v^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dr \tag{2.57}$$

y su tiempo de viaje:

$$T(r, p) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{v \cos i} = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{r}{v^2} (\frac{r^2}{v^2} - p^2)^{-\frac{1}{2}} dr = p\theta \pm \int_{r_0}^{r} (\frac{r^2}{v^2} - p^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r} \tag{2.58}$$

Singularidad de raíz cuadrada en el fondo del camino de rayo, donde $\frac{r}{pv} = 1$, es removida sobre la integración. Rayos emitidos por fuente (foco) son registrados en estaciones situadas a varias distancias epicentrales. Configuración geométrica se ve en figura 2.8 considerando un rayo directo

Estas ecuaciones han sido usadas para calcular camino de rayo para modelos esféricamente simétrico de velocidad sísmica dentro de la tierra. Principalmente velocidades sísmicas aumentan con la profundidad y rayos son refractados hacia la superficie de la tierra. En geometría esférica $\frac{v}{r}$ debe aumentar con la profundidad. Si $\frac{v}{r}$ decrece con la profundidad (como es el caso de la tierra) el rayo es refractado hacia abajo hasta que este alcance una región en la cual $\frac{v}{r}$ aumenta una vez más, y el rayo se refracta hacia arriba. Este comportamiento da como resultado una zona de sombra que se forma sobre la superficie de la tierra. Región que no es iluminada por algún rayo directo de una fuente particular.

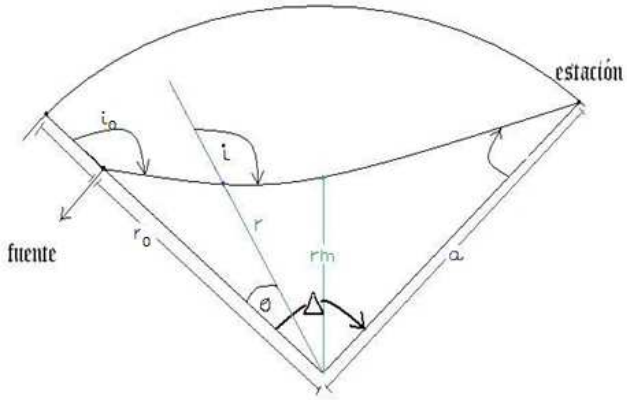

Figura 2.8: *Configuración geométrica de un rayo directo, donde aqui* Δ *es el ángulo total subtendido por el rayo en el interior terrestre.*

Curva Camino-Tiempo

Para obtener la amplitud de una onda incidente es necesario considerar diferentes parámetros, de los cuales la relación camino-tiempo, es fundamental. Teniendo curva camino-tiempo, $T(\Delta)$ y un modelo de velocidad dependiente del radio $v(r)$, podemos estimar el efecto de refracción en la amplitud de una onda llegando a alguna distancia. Diferenciando el tiempo de viaje en función de la distancia, $\frac{dT}{d\Delta}$ y luego $\frac{d^2T}{d\Delta^2}$, podemos deducir el parámetro rayo de ecuación (2.52) y la amplitud de la ecuación (2.55) respectivamente.

Así para resolver la amplitud de una onda incidente debemos obtener primeramente la relación camino-tiempo. Curva camino-tiempo puede adoptar formas más complicadas dependiendo de la variación de velocidad sísmica con profundidad. Veremos a continuación algunos ejemplos de medios típicos.

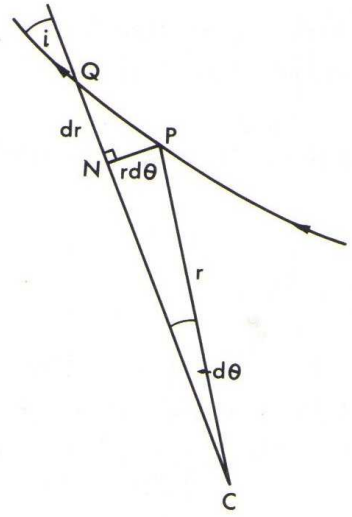

Figura 2.9: *Trazado de rayo. PQ es un elemento de camino de rayo de longitud ds. Del triángulo NPQ tenemos* $\tan i = r\frac{d\theta}{dr} = (\frac{pv}{r})(1-\frac{p^2v^2}{r^2})^{-\frac{1}{2}}$. *Si v es conocido como una función de r, esta ecuación describe el camino de rayo en la forma de* $\theta(r)$.

Considerando un medio compuesto de capas planas. En cada capa la velocidad sísmica, es o bien uniforme o aumenta linealmente con la profundidad. Los caminos de rayos en capas uniformes son líneas rectas; aquellos en capas variables son arcos de círculos, cóncavos hacia arriba. La curvatura del camino de rayo es proporcional al gradiente de velocidad. Un medio que consiste en una capa con velocidad linealmente aumentando, tendrá una función de tiempo $T(X)$ monótonamente creciente. Si tal capa tiene una capa uniforme debajo de ella entonces los caminos de rayo que pasan por la capa superior seguirán hacia abajo como líneas directas y nunca serán registrados en la superficie. La curva $T(X)$ se determina en distancia correspondiente a rayos con puntos de inflexión en la interfaz entre las dos capas. La capa inferior es una zona de baja velocidad. Medios esféricos se comportan de manera similar siempre que $\frac{v(r)}{r}$ se comporte como $v(z)$ en el medio plano.

Cuando una capa uniforme está en un medio con velocidad creciente entonces pueden ocurrir múltiples caminos. Hay dos o más trayectorias de rayos muy diferentes entre dos puntos. El distinguir entre llegadas diferentes, es a menudo la parte más difícil de interpretar. Los rayos para un modelo de dos capas son mostrados en figura 2.10 (a). Ignorando rayos que viajan a lo largo de la superficie del medio I - *onda directa*, los rayos como OD, que tienen ángulos de salida (incidencia) grandes, no penetran el medio II a una gran profundidad y viajan distancias horizontales grandes. Rayos como OE, con pequeños ángulos de despegue, penetran grandes profundidades en el medio II viajando además grandes distancias horizontales.

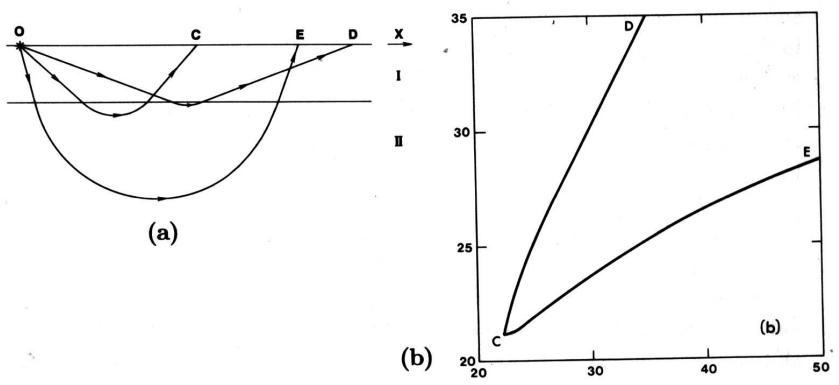

Figura 2.10: *(a) Caminos de rayo en espacio con dos medios: I tiene velocidad uniforme y II tiene velocidad aumentando linealmente con la profundidad. Caminos de rayo son líneas directas en medio I y arcos de círculo en medio II. (b) curva camino-tiempo.*

Rayos con ángulos de despegue intermedios viajan distancias horizontales cortas; OC representa la distancia más corta para cualquier rayo que penetra la capa II. La función camino-tiempo es mostrada en figura 2.10 (b); letras corresponden a los rayos en figura 2.10 (a). El tiempo de viaje no es una simple función de la distancia, puesto que las dos ramas CD y CE corresponden a diferentes sets de caminos de rayo.

Considerando 3 capas, como se muestra en la figura 2.11 (a). La velocidad dentro de cada capa aumenta linealmente con la profundidad. En la capa media, esto aumenta en una taza más rápida que en las otras dos, produciendo una triplicación como lo mostrado en la figura 2.11 (b). La rama AD corresponde a rayos viajando sólo en la capa superior. D está situado en la máxima distancia posible de estos rayos. La rama CE corresponde a los rayos que han sido refractados de la capa mas inferior. La rama DC tiene rayos que han viajado en la capa media, que no es lo bastante gruesa como para generar un punto crítico como en la figura 2.11 (b). C por lo tanto corresponde al rayo que profundiza en la parte alta de la capa III. Tres pulsos serían vistos en el rango de distancia de C a D.

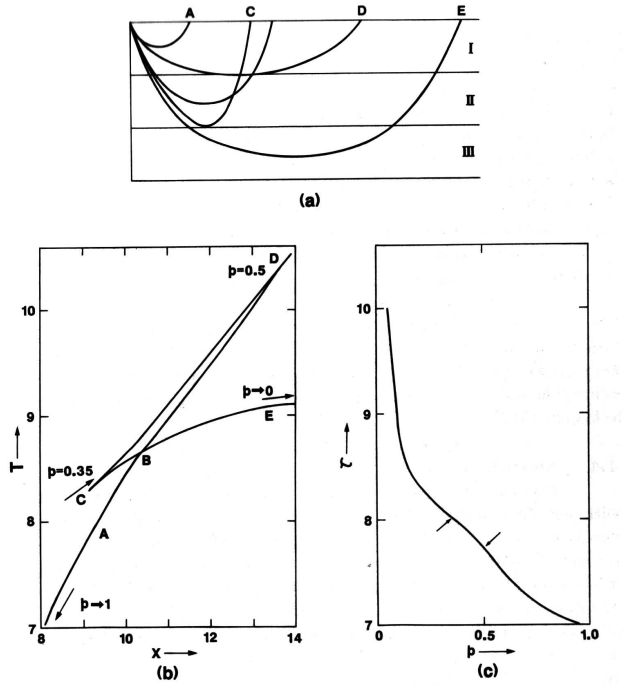

Figura 2.11: *(a) Caminos de rayos en un medio de 3 capas en que la capa media tiene una velocidad de onda que aumenta en una tasa mayor que en las otras dos. En (b) la curva de tiempos de viajes tiene 3 ramas correspondientes a rayos que profundizan en capa I (AD), capa III (CE), y capa II (DC). (c) es la correspondiente curva $\tau - p$, que es suave. Las cúspides se han convertido en los puntos de inflexión indicados.*

Estas complicaciones surgen en la tierra. En ciertas distancias la curva de tiempo de viaje puede ser difícil de estimar con exactitud. Por ejemplo, el núcleo produce una zona de sombra comenzando en los 104° (para modelo de velocidad de Jeffreys-Bullen; efectos de difracción y sombras para ondas de altas frecuencias ocurren en distancias más pequeñas). Ondas PKP y PKIKP tienen una triplicación similar a esto en figura 2.11 (b).

Funciones de camino-tiempo múltiples, son difíciles de tratar con la teoría y difíciles de calcular a partir de mediciones. Scattering en mediciones cerca de una triplicación como el de la figura 2.11 (b), por ejemplo, puede obscurecer los detalles del triplicación totalmente, y los datos pueden aparecer como un conjunto de puntos en aquella vecindad. Haciendo mas difícil nuestra estimación de la curva de $T(\Delta)$en estos casos.

La distancia Δ es siempre positiva, de modo que una triplicación al ser resuelta, aparecen curvas independientes en intervalos determinados de distancias, cada una caracterizada por ser una curva suave.

Considerando rayos viajando en el interior terrestre, desde un evento a una estación, que son interrumpidos en su camino por heterogeneidades, podemos utilizar teoría de "single-scattering". Nos enfocamos en el hecho de que las heterogeneidades perturban poco a la propagación de las ondas.

2.4.2. Teoría de Scattering

Scattering de Ondas Elásticas

A continuacion usaré teoría desarrollada por Wu y Aki (1985) para ondas elásticas y scattering por heterogeneidades volumétricas. Como vimos anteriormente scattering producido en el interior terrestre puede influenciar las fases a través de la reducción de amplitud. Por lo tanto es escencial encontrar una expresión que caracterize la amplitud. En teoría de scattering de primer orden, se asume que la energía de ondas scattereadas es pequeña comparada a la energía de onda incidente. Se consideran ondas que son afecadas por single-scattering y ondas interactuando con heterogeneidades volumétricas.

Heterogeneidades Volumétricas

La idea básica de encontrar la solución de onda de un medio débilmente inhomogéneo, consiste en separar la solución en campo incidente (solución cuando no hay heterogeneidades) y el campo de scattering. La ecuación de movimiento para un campo scattereado es la ecuación de la elastodinámica en un medio homogéneo, con fuentes secundarias que representan las heterogeneidades interactuando con el campo incidente. Esta fuente secundaria en cada punto es la combinación de una fuerza simple, y un tensor de momento que depende de las propiedades de las heterogeneidades.

Si la función de Green elástica del medio terrestre es conocida, el campo scattereado será obtenido como la suma de las contribuciones de todas las fuentes secundarias.

Una heterogeneidad arbitraria representada por variaciones de los parámetros elásticos

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}) \tag{2.59}$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_0 + \delta\lambda(\mathbf{x})$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 + \delta\mu(\mathbf{x})$$

con suave variación del medio en forma radial, satisface

$$\delta\rho \ll \rho_0 \tag{2.60}$$

$$\delta\lambda \ll \lambda_0$$

$$\delta\mu \ll \mu_0$$

Solución de ecuación de onda $\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t)$ es considerada como la suma de la onda directa $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)$ y la onda scatterada $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \tag{2.61}$$

considerando aproximación de Born, asumimos $\mathbf{u} \ll \mathbf{u}^t$(en esta aproximación, scattering múltiple es despreciado)

Sustituimos ecuaciones (2.59) y (2.61) en ecuación de Navier (2.9), resultando

$$(\rho_0 + \delta\rho)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - \nabla\{(\lambda_0 + \delta\lambda)(\nabla\cdot\mathbf{u}_0 + \nabla\cdot\mathbf{u})\} \tag{2.62}$$

$$-2\left(\nabla\delta\mu\right)\cdot\left(e_0+e\right)-\left(\mu_0+\delta\mu\right)\left(\nabla^2\mathbf{u}_0+\nabla^2\mathbf{u}\right)-\left(\mu_0+\delta\mu\right)\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_0+\nabla\cdot\mathbf{u}\right)=0$$

Consideramos términos de segundo orden, que constituyen la suma de la fuerza generada por un vector, y la fuerza generada por un tensor de momento. Para un desarrollo mas intuitivo, y para deducir expresión de la fuerza f y del tensor M, utilizamos ecuación de movimiento de la forma

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\nabla_j\tau_{ji} \tag{2.63}$$

con

$$\nabla_j\tau_{ji}=\lambda\delta_{ij}\left(\nabla\cdot u\right)+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{2.64}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\partial_i\left(\lambda\nabla\cdot u\right)+\partial_j\left(\mu u_{i,j}+\mu u_{j,i}\right) \tag{2.65}$$

así la fuente equivalente es

$$F_i=-\delta\rho\frac{\partial^2 u_{0i}}{\partial t^2}+\partial_i\left(\delta\lambda\nabla\cdot u\right)+\partial_j\left(\delta\mu u_{0i,j}+\delta\mu u_{0j,i}\right)=f_i-\nabla_j M_{ji} \tag{2.66}$$

que está compuesta por una fuerza f y un tensor de momento M ($-\nabla\cdot M$ es la fuerza generada por un tensor de momento) de la forma

$$f_i=-\delta\rho\frac{\partial^2 u_{0i}}{\partial t^2} \tag{2.67}$$

$$M_{ji}=-\delta\mu\left(u_{0i,j}+u_{0j,i}\right)-\delta_{ij}\delta\lambda\nabla\cdot u_0$$

Las heterogeneidades o fluctuaciones son representadas por $\mathbf{f}$ y $\mathbf{M}$. El campo scattereado debido a heterogeneidades se puede tratar como producto de estas fuerzas. La fuerza $\mathbf{f}$ y la fuerza producto de un tensor $\mathbf{M}$, escritas en el dominio de la frecuencia son de la forma

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x},w\right)=w^2\delta\rho\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x},w\right) \tag{2.68}$$

$$\mathbf{M}\left(\mathbf{x},w\right)=-\delta\mu\left(\mathbf{x}\right)\left[\nabla\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x},w\right)+\left(\nabla\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x},w\right)\right)^T\right]-\delta\lambda\left(\mathbf{x}\right)\nabla\cdot\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x},w\right)\mathbf{I}$$

superíndice T significa transpuesta, y $\mathbf{I}$ es el tensor identidad.

La onda scattereada debido a estas fuentes es obtenida en términos de la función de Green (Apéndice).

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{x},w\right)=\int\mathbf{G}\left(\mathbf{x},\mathbf{x}',w\right)\cdot\mathbf{f}\left(\mathbf{x}',w\right)+\nabla_{\mathbf{x}'}\mathbf{G}\left(\mathbf{x},\mathbf{x}',w\right):\mathbf{M}\left(\mathbf{x}',w\right)d^3\mathbf{x}' \tag{2.69}$$

La onda incidente es generada por una fuente puntual (terremoto) y propagadas hacia las heterogeneidades a través de un medio que varía en forma radial suavemente. La onda incidente puede ser aproximada por ondas planas locales. En la aproximación de teoría de rayos el desplazamiento de la onda P es dado por:

$$\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x},w\right)=Ag_s(\mathbf{x})\mathbf{e}^{iw(t-T_s(\mathbf{x}))}\widehat{\mathbf{n}}_0\left(\mathbf{x}\right) \tag{2.70}$$

donde A es la amplitud, $g_s(\mathbf{x})$ es el coeficiente de extensión geométrica (decaimiento esférico, para medio homogéneo es $\frac{1}{r}$), $\widehat{\mathbf{n}}_0\left(\mathbf{x}\right)$ es la dirección de propagación. T es el tiempo de viaje, $\widehat{\mathbf{n}}_0$ y g varían suavemente en el espacio. Dentro de la misma aproximación, la función de Green para campo lejano para ondas P es

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{x},\mathbf{x}',w\right)=g_r(\mathbf{x},\mathbf{x}')\mathbf{e}^{iw(t-T_r(\mathbf{x}'))}\widehat{\mathbf{n}}\left(\mathbf{x}\right)\widehat{\mathbf{n}}'\left(\mathbf{x}'\right) \tag{2.71}$$

donde g_r es el coeficiente de extensión geométrico, T_r es el tiempo de viaje, $\widehat{\mathbf{n}}$ y $\widehat{\mathbf{n}}'$ son las direcciones de propagación respectivamente de las ondas scattereadas en $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$. La función de Green de elastodinámica está relacionada con la estructura y características del medio por el que se propagan las ondas sísmicas. En concreto, esta función se define como la respuesta de un medio elástico a una fuerza impulsiva, que actúa en un punto, y en un instante.

de (2.68), (2.69), (2.70) y (2.71) uno puede obtener

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \frac{k^2}{4\pi}\widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \int \phi\left(\mathbf{x}'\right) A g_s g_r R e^{iw(t-T_s-T_r)} d^3x' \tag{2.72}$$

con k número de onda, R coeficiente de reflexión/transmisión, subíndices s y r denotan caminos fuente-punto de scattering y punto de scattering-estación, respectivamente y

$$\phi\left(\mathbf{x}'\right) = \frac{\delta\rho(\mathbf{x}')}{\rho_0}\cos\Theta - \frac{\delta\lambda(\mathbf{x}')}{\lambda_0+2\mu_0} - \frac{2\delta\mu(\mathbf{x}')}{\lambda_0+2\mu_0}\cos^2\Theta \tag{2.73}$$

donde $\Theta = \cos^{-1}\left[\widehat{\mathbf{n}}_0(\mathbf{x}')\,\widehat{\mathbf{n}}'(\mathbf{x}')\right]$ es el ángulo de scattering en el punto de scattering $\mathbf{x}'$.

Ondas propagadas a través de un medio generan un campo, y uno puede relacionar las propiedades del campo de onda con las propiedades del medio. La propiedad de interés aquí es la intensidad, o el cuadrado de la amplitud. La amplitud media cuadrática del campo scattereado, obtenido como el promedio sobre todas las realizaciones posibles del medio, es dado por:

$$\left\langle |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 \right\rangle = \frac{\pi}{2}k^4 \int (A g_s g_r R)^2 \,\Phi\left(k\left(\widehat{\mathbf{n}}_0 - \widehat{\mathbf{n}}'\right)\right) dV \tag{2.74}$$

donde $\langle\ \rangle$ es el promedio de distribuciones. Donde en la distribución lo que varía es el ϕ. $\Phi(\mathbf{K})$, transformada de ϕ que indica cuanto es la amplitud de lo que se scatterea, y es de la forma

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle \phi(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle\, e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{y}} d^3\mathbf{y} \tag{2.75}$$

con $\mathbf{K} = k\left(\widehat{\mathbf{n}}_0 - \widehat{\mathbf{n}}'\right)$ ($\widehat{\mathbf{n}}_0$ y $\widehat{\mathbf{n}}'$ son las direcciones de ondas incidente y scattereada en el punto de scattering), la Transformada de Fourier en 3-D, de la función de correlación de cada variación, $\delta\rho$, $\delta\lambda$, y $\delta\mu$. La principal contribución para scattering en la dirección de avance se debe a variaciones en velocidad de onda P como

$$\phi(\mathbf{x}) \approx -2\frac{\delta\alpha(\mathbf{x})}{\alpha}\left(\cos^2\frac{\Theta}{2} - \frac{1}{3}\sin^2\Theta\right) \tag{2.76}$$

Para el análisis de enerigía de coda de corto período del evento de Bolivia de magnitud ~ 8, tenemos que respuesta de la fuente tiene una duración de 20 s. Esto puede ser incluido en la ecuación (2.74) como

$$\left\langle |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 \right\rangle = \frac{\pi}{2}k^4 \int \left(A g_s g_r R E(t-T)\right)^2 \Phi(\mathbf{K})\, dV \tag{2.77}$$

donde $E(t-T)$ es la envoltoria dada por ejemplo como una función Gaussiana, y T el tiempo de viaje total de la onda scattereada. La solución de ecuación (2.77) produce un tren de onda finito en un tiempo que puede ser comparado con las observaciones.

Capítulo 3

Datos y Método

3.1. Datos

Los datos los obtenemos de la Red mundial en página de http://www.iris.edu/hq/, para uno de los sismos mas grandes y profundos, ocurrido en Bolivia el 9 de junio de 1994, con epicentro ubicado en una longitud de 67.55, y latitud -13,84. Evento de magnitud $M = 8{,}2$ grados en la escala de Richter, y origen del sismo a una profundidad de $h = 631,3km$.

Existen datos en 30 estaciones, sin embargo, utilizamos datos registrados en 12 estaciones de buena calidad, entre distancias $\Delta = 114° - 159°$. La figura 3.1 muestra la zona geográfica del terremoto, y las estaciones utilizadas.

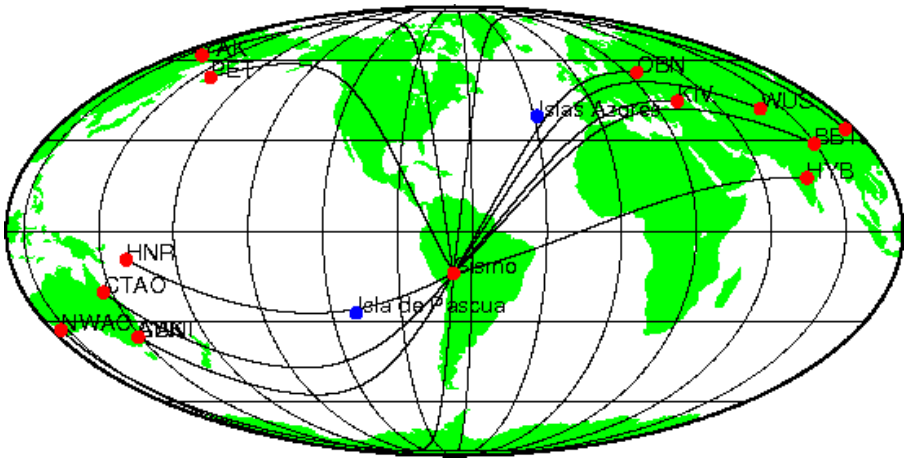

Figura 3.1: *Zona geográfica donde ocurrió evento de Bolivia, y estaciones utilizadas con mejor señal.*

Tenemos datos del terremoto de Bolivia registrados en estaciones en distancias entre $114° - 159°$. De estas estaciones vemos en la figura 3.2, registros de CAN (120°), WUS (140°), XAN (159°).

Filtramos los datos del evento de Bolivia para altas frecuencias, aplicando un filtro pasa banda entre 4 y 9 Hz. Calculamos su envoltoria, resultando lo mostrado en la figura 3.3.

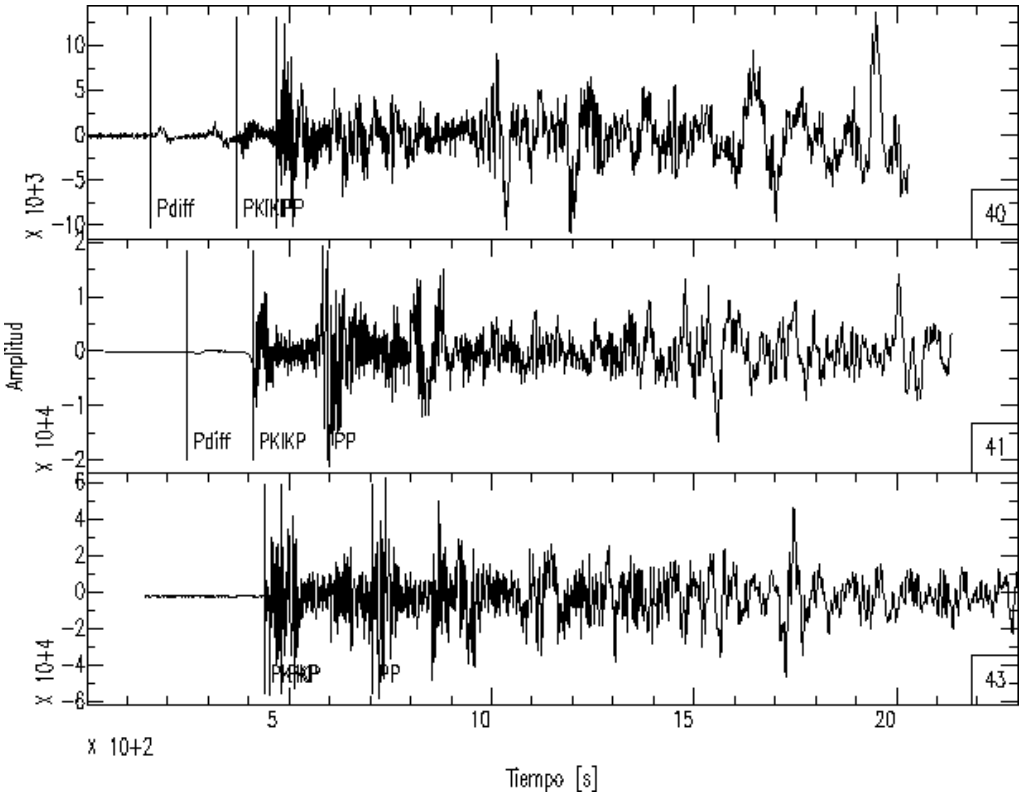

Figura 3.2: *Sismogramas registrados en estaciones, CAN* (120°)*, WUS* (140°)*, XAN* (159°).

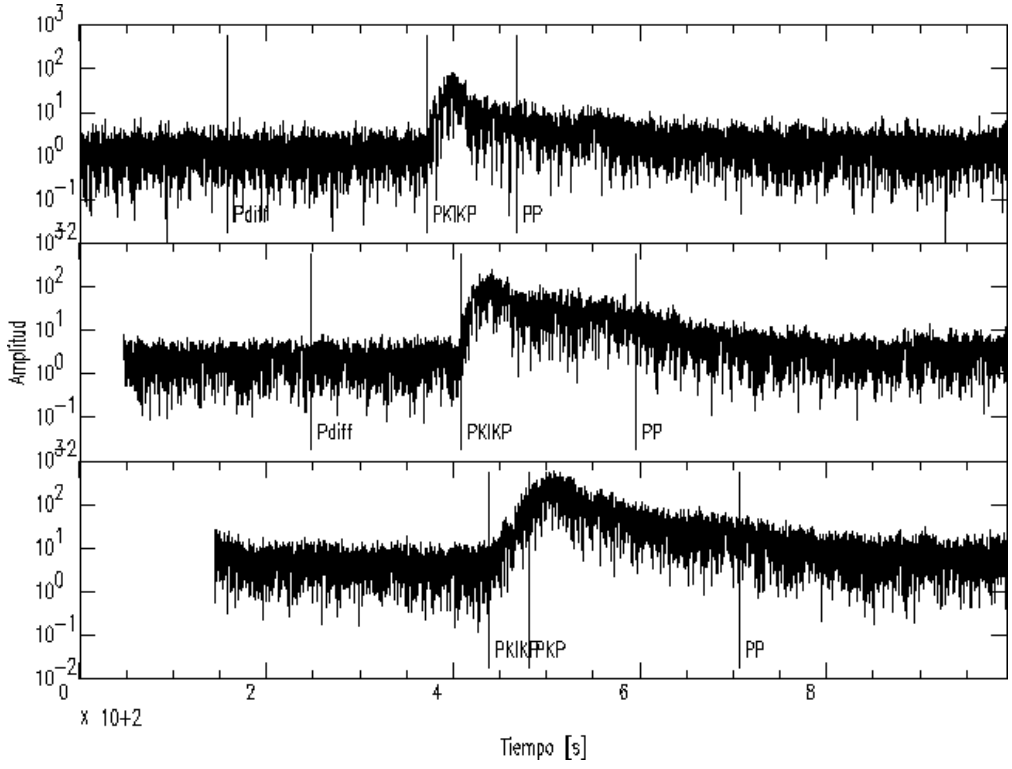

Figura 3.3: *Envoltorias de sismogramas filtrados entre 4 y 9 Hz, registrados en estaciones CAN* (120°)*, WUS* (140°)*, XAN* (159°).

La energía de alta frecuencia entre 4 y 9 Hz, correspondiente a ondas que pasan por el interior de la tierra registrados a (120°), (140°), (159°), se extiende por mucho tiempo, evidenciando una zona con heterogeneidades. Para altas frecuencias se resalta que la unica señal clara que llega es la coda. Lo especial de esta señal es la forma, asociada con ondas que vienen del núcleo, producto de scattering en heterogeneidades en esa zona. La coda sísmica registrada es larga, típica de procesos de scattering en región amplia, lo que motiva el calculo de amplitud. La duración de la coda de alta frecuencia es en promedio de 300 s, a partir de la llegada de la onda PKiKP. La coda decae por demasiado tiempo para tratarse de una trayectoria directa, ya que duración de la fuente para sismo de Bolivia, es de sólo 20 segundos. Considerando una velocidad promedio de 12 km/s, la señal mas tardía recorrería 3600 km mas aprox., evidenciando que se propaga por una zona amplia. La coda de ondas sísmicas estaría formada por scattering que se produce a lo largo de toda la trayectoria de cada rayo.

Para explicar la larga duración y complejidad de las codas, se requiere que las heterogeneidades esten distribuidas en una zona muy extensa, y que produzcan scattering. Para esto calculamos codas sintéticas, teniendo el tiempo de llegada de cada onda scattereada y la amplitud que estas aportan.

3.2. Método

Para encontrar la región de procedencia de la coda sísmica, o lugares que mas aportarían en cuanto a heterogeneidades, es necesario simular el efecto de una heterogeneidad en el medio, a una profundidad determinada. Se creará un modelo global que considere las distintas trayectorias seguidas por los rayos. Veremos primero distribución de rayos directos en el interior de la tierra, y luego nos enfocaremos en ondas scattereadas, las cuales parten con un parámetro de rayo p, para seguir luego del scattering con un parámetro p'.

3.2.1. Trazado de Rayos

Para obtener la amplitud de una onda incidente utilizamos ecuación (2.55) de teoría de rayos. Para llevar a cabo simulaciones de scattering en las distintas capas del interior terrestre comenzaremos con un *trazado de rayos* que cubra toda la tierra (rayos que salen de la fuente), considerando rango de p (p, parámetro de rayo que identifica cada rayo) desde el interior de la tierra hasta la fuente $r0$ como se ve en la figura 3.4. Para esto se considera un modelo terrestre lateralmente homogéneo que varía en forma radial, y una distribución aleatoria de heterogeneidades. Utilizamos modelo estándar de velocidades por capas del IASPEI (International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior). Modelo de capas homogéneas y modelo discretizado usando $V = ar^b$, cuando velocidad sea dependiente del radio $v(r)$.

Para el trazado de rayos, dividimos el modelo terrestre por capas $nc = 200$ (nc, número de capas), considerando número de rayos, $nr = 200$. Profundidad de la fuente es de $r0 = 630km$ (profundidad correspondiente al sismo de Bolivia). Se ingresa en el programa la distancia de una estación, como variable de entrada (distancias de estaciones con registros del evento de Bolivia). Y según región donde se produzca scattering se generan las fases que interactúan con el interior terrestre.

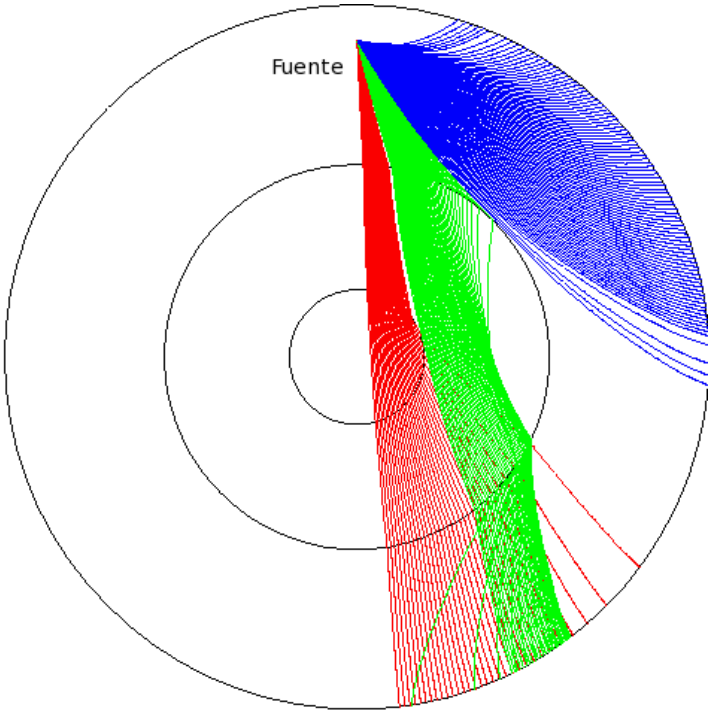

Figura 3.4: *Trazado de rayos directos para todo el interior terrestre.*

Teniendo el trazado de rayos correspondiente a las ondas directas, podremos calcular la amplitud, utilizando la ecuación (2.55). Ecuación para el calculo de amplitud requiere de la segunda derivada del tiempo en función del ángulo, por lo que requerimos los valores de estos parámetros. Considerando un radio fijo (para este caso el radio terrestre) calculamos para un rango de distancias el tiempo de viaje de cada rayo, al llegar a la superficie. Teniendo los valores del tiempo de viaje y ángulo para cada capa, podemos expresar de la teoría (ecuación (2.55)), la relación camino-tiempo, ajustando un polinomio a estos resultados. Valor de la amplitud de onda incidente en una distancia determinada, se calcula utilizando

$$t = \sum_{n=0}^{3} a_n \Delta^n = t(\Delta) = \alpha + \beta\Delta + \delta\Delta^2 + \gamma\Delta^3 \tag{3.1}$$

función que relaciona ambos parámetros para una onda incidente, donde t es el tiempo y Δ es la distancia. Luego de tener ecuación anterior, se calcula la amplitud a una distancia (mediante ecuación (2.55)).

Para identificar las posibles zonas mas heterogéneas de la tierra es necesario trazar la trayectoria, de distintas ondas que son scattereadas y que interactúan con las capas del interior terrestre. Como las primeras ondas que llegan a distancias sobre 100° son $PKIKP$, PKP, PP, utilizo estas como ondas directas, que son scattereadas a medida que se propagan por el interior terrestre. Ondas scattereadas pueden denotarse como, ${}^{a}P{*}P^{s}$, ${}^{a}P{*}P^{b}$, ${}^{d}P{*}P^{s}$, ${}^{d}P{*}P^{b}$, ${}^{a}P{*}P^{b}KP$, ${}^{a}P{*}P^{s}KP$, ${}^{d}P{*}P^{b}KP$,${}^{d}P{*}P^{s}KP$, $PK^{a}P{*}P^{s}$, $PK^{a}P{*}P^{b}$, $PK^{d}P{*}P^{s}$, $PK^{d}P{*}P^{b}$, $P^{a}K{*}K^{s}P$, $P^{a}K{*}K^{b}P$, $P^{d}K{*}K^{s}P$, $P^{d}K{*}K^{b}P$, $PK^{a}I{*}I^{s}KP$, $PK^{a}I{*}I^{b}KP$, $PK^{d}I{*}I^{s}KP$, $PK^{d}I{*}I^{b}KP$. Superíndice a y d indica scattering producido antes o después del punto mínimo (punto de retorno) de la trayectoria de un rayo. Signo $*$ indica lugar donde ocurre scattering y superíndices s y b, si rayos luego del scattering suben o bajan a la superficie, respectivamente.

Considerando fases anteriormente mencionadas, genero un programa en fortan 77 que calcule el resultado de scattering en diferentes puntos de la trayectoria de un rayo emitido por la fuente. Considero modelo terrestre dividido en un gran número de capas. Dentro de este programa, creo subrutinas que caracterizen el scattering ya sea antes o después del punto mínimo, y en las distintas capas del interior terrestre. Teniendo un modelo de velocidades, calculo en cada capa y para cada rayo el ángulo Δ (ángulo epicentral) con ecuación (2.57) y el tiempo T con ecuación (2.58), correspondiente a ese punto. Para cada fase voy uniendo según sea el caso, la trayectoria correspondiente, así sea en el manto y/o llegando al núcleo externo y/o interno. Genero la trayectoria de las distintas fases saliendo de una fuente a profundidad 630 km.

En el primer paso simulamos la salida de rayos desde una profundidad $630km$, obteniendo la figura 3.4. En cada capa y para cada rayo, guardo los parámetros correspondiente a ese punto en la capa. Teniendo el trazado de rayos, como paso siguiente vamos uniendo las trayectorias necesarias para cada caso de las respectivas fases. Para el caso de scattering en el núcleo externo, consideramos por ejemplo, una onda incidente scattereada después de su punto minímo, y que luego va a la superficie. Esta onda es denotada por $P^dK * KP$ e incluye casos $P^dK * K^bP$ y $P^dK * K^sP$ como se ve en la figura 3.5.

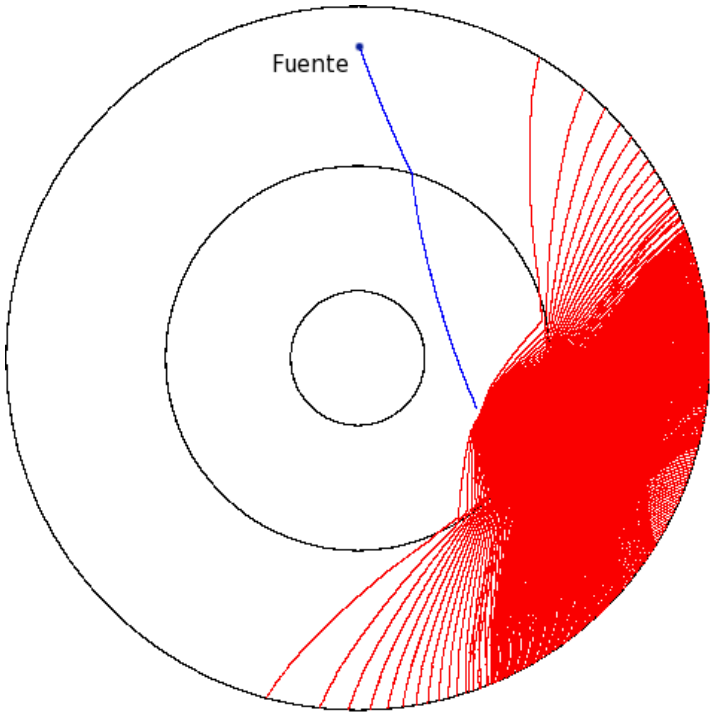

Figura 3.5: *Rayo saliendo de la fuente y que es scattereado en el núcleo externo después de su punto mínimo, y que luego va a la superficie, denotado por* $P^dK * KP$.

Para scattering en el manto, vemos en la figura 3.6, el caso de la fase $PK^dP * P$, de un rayo incidente que es scattereado luego de su punto mínimo o de retorno, y que luego va a la superficie, figura 3.6, considera caso $PK^dP * P^b$ y $PK^dP * P^s$.

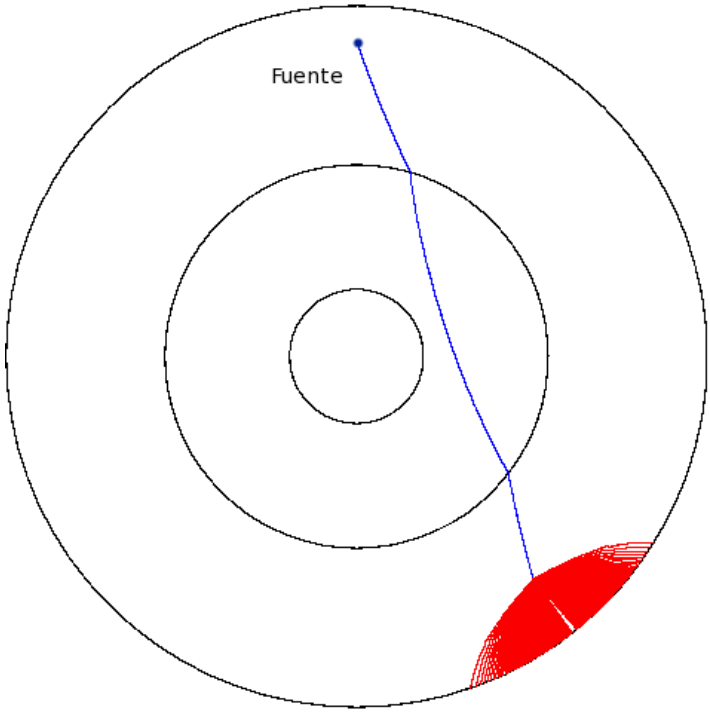

Figura 3.6: *Rayo saliendo de la fuente y que es scattereado en el manto después de su punto mínimo, denotado por* $PK^dP * P$.

Considerando lo expuesto hasta ahora en este capítulo, se obtiene una visión global, teniendo en cuenta todas las zonas de la tierra y fases que interactúan con ellas. Cada fase recorre dos caminos uno antes y el otro después del punto de scattering. Así rayo incidente p sale de la fuente para llegar a una capa situada a un radio determinado, en el cual se produce scattering, para luego seguir con otro parámetro de rayo p'. Debemos enfocarnos en ambos trayectos, el que sigue el rayo incidente p, desde la fuente hasta el punto de scattering y el trayecto del rayo p' desde el scattering hasta la superficie. Para cada trayecto seguido por la onda, calculo el ángulo y el tiempo, considerando un radio r fijo, para cada caso.

3.2.2. Curvas Camino-Tiempo

Para calcular la amplitud de una onda incidente debemos obtener relación camino-tiempo, en cada trayecto. Curva camino-tiempo se comporta de manera diferente para las fases consideradas, debido a la variación de velocidad sísmica con la profundidad. Para el primer trayecto desde la fuente $r0$ al punto de scattering s, la relación camino-tiempo se calcula considerando todos los rayos p saliendo de la fuente y llegando a un determinado radio. Calculo de ecuación (2.57) el ángulo Δ (ángulo epicentral) y de ecuación (2.58) el tiempo T, esto para cada capa y cada rayo. A los datos obtenidos de distancia y tiempo se les ajusta un polinomio, de la forma de ecuación (3.1).

Donde el tiempo será $t_{(r_0-s)}$, tiempo de viaje de la fuente al punto de scattering y Δ la distancia (ángulo barrido). Con relacion anterior tenemos tiempo de viaje en función de la distancia para el primer trayecto y así obtenemos la primera derivada proporcional al parámetro de rayo y la segunda derivada proporcional a la amplitud, de ecuación (2.55).

Luego de tener el tiempo de viaje y amplitud de la onda incidente desde la fuente hasta el punto de scattering, nos enfocamos en el segundo trayecto entre el punto de scattering s y la estación r. Obtenemos la relación camino-tiempo para el segundo trayecto, considerando un radio fijo. Posteriormente se ajusta función a esta curva, de la misma forma que para el trayecto anterior, lo que resulta en una función $t_{(s-r)}$ (donde $t_{(s-r)}$ es el tiempo de viaje, desde el punto de scattering a la estación en distancia Δ.)Con función calculamos de ecuación (2.55) la amplitud para el segundo trayecto, punto se scattering-estación.

En ciertas distancias la curva camino-tiempo puede ser difícil de estimar con exactitud. Estas complicaciones surgen debido al modelo de velocidad terrestre. Por lo que para fases que llegan al núcleo, el ajuste de curva camino-tiempo, es mas dificil aún. Para tales ondas llegando a un radio fijo, ya sea en su primer o segundo trayecto, la tendencia de llegada tiene un quiebre. Esto quiere decir que rayos van llegando cada vez a una distancia mayor, y para un parámetro de rayo, se produce un quiebre, lo que hace que el siguiente grupo de rayos no sigan el patron de llegada. Comportamiento anterior resulta en la división de curvas camino-tiempo y se conoce como *caústica*.

Curvas de camino-tiempo que poseen caústica, son difíciles de tratar, haciendo mas dificil la estimación de función $T(\Delta)$. Esto debido a que se debe dividir data en dos partes según tendencia de llegada. Si distancia está aumentando, y al llegar a un punto se produce un cambio de tendencia, entonces existirá caústica. Esto se hace visible para ondas llegando al núcleo, debido a la variación de velocidad en el interior terrestre. En caso de caústica, tendremos dos polinomios, uno ajustado a cada curva camino-tiempo, y amplitudes para cada rango. Resolvemos casos que contienen caústicas, y obtenemos en general todas las funciones $T(\Delta)$, bien definidas, para cada onda.

Al considerar rayos viajando en el interior terrestre, desde un evento a una estación, que son interrumpidos en su camino por heterogeneidades, podemos utilizar Teoría de "single-scattering", enfocándonos en el hecho que las heterogeneidades perturban poco a la propagación de las ondas. Por lo que Teoría de "múltiple-scattering", es despreciada.

De teoría de single-scattering para heterogeneidades volumétricas, calculamos la amplitud con ecuación (2.77). La amplitud total, será producto de las amplitudes en cada trayecto (donde $A = g$, f_{scatt} corresponde a ϕ y R depende de los ángulos y no varía mucho) y parámetros de ecuación (2.77) son calculados con teoría de rayos. La integral se hace sobre todo el volumen que tiene heterogeneidades.

$$A = A\,(r_0 - s) * A(s - r) * f_{scatt} \tag{3.2}$$

El factor de scattering es denotado por f_{scatt}, y depende de las fluctuaciones $\frac{\delta\rho}{\rho}$, $\frac{\delta\mu}{\mu}$ y $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$,términos pueden ser expresados en variaciones de v_p o v_s. De la teoría, ecuación (2.73) muestra que factores de radiación μ, *lambda* y *rho* serán multiplicados por $\cos\theta$, $\cos^2\theta$ y 1 respectivamente.

El cálculo de amplitud se hace en distancias de estaciones, y para cada rayo incidente considerando componente tridimensional, acimut ϕ cada 10°. Amplitud total además debe ser multiplicada por un elemento de volumen dV, que representa la zona involucrada. El elemento de volumen es entendido como el "peso", ya que identifica cuanto volumen en torno al punto de scattering caracteriza esa amplitud. El elemento de volumen en una configuración esférica es

$$dV = r dr \sin\theta d\theta d\phi \tag{3.3}$$

Para cada rayo saliendo de la fuente tenemos una profundidad a la cual se produce scattering, un tiempo de viaje, un acimut, y un ángulo barrido, lo que determina una extensión geométrica. Considerando profundidad de scattering y ángulos barridos, el elemento de volumen queda de la forma

$$dV = s^2 \sin\left(\theta_1\left(k,s\right)\right) * abs\left(\theta_1\left(k,s\right) - \theta_1\left(k-1,s\right)\right) * ds * d\phi \tag{3.4}$$

donde $ds = 100km$ y $d\phi = 10°$. Entonces la amplitud total será

$$A_{tot} = dV * A\left(r_0 - s\right) * A(s-r) * F_{scatt} \tag{3.5}$$

Una vez desarrollado el programa y obtenido el modelo, se aplica para cada fase y sus respectivos casos. Calculamos envoltoria de resultados obtenidos del modelo, para distancias correspondientes a estaciones con registros de evento de Bolivia. Se colocan los datos reales y modelos en una misma ventana temporal con respecto al inicio del sismo. Comparamos resultados del modelo, con los datos del sismo, en programa SAC (programa de análisis sismogramas). Estando en una misma ventana analizaré, tiempo de llegada de respectivas fases, amplitud y forma de decaimiento. El desarrollo del modelo está enfocado en encontrar posibles zonas mas heterogéneas en el interior terrestre y como estas afectan en la amplitud de la onda.

Capítulo 4

Análisis

4.1. Análisis de Datos

En este capítulo nos enfocamos en el análisis de datos observados, comparados con resultados obtenidos del modelo. Se comparan los datos del terremoto de Bolivia de 1994 ($M = 8{,}2, h = 631,3km$), filtrados entre 4 y 9 Hz y los resultados del modelo terrestre descrito en metódologia, obtenido para cada fase y cada distancia. Estudio es enfocado en fases mencionadas en el capítulo anterior y las regiones con las cuales estas interactúan. Se analizarán los tiempos de llegada de cada fase, amplitudes y formas de decaimiento.

4.1.1. Tiempos de viaje

Para modelar los tiempos de llegada de las fases a las distancias de estaciones en estudio, se considera modelo terrestre descrito en metodología. Se aplica consideraciones en un programa de fortran 77, de calculo de parámetros. Consideramos términos de atenuación dados por variación de ρ, μ y λ, obteniendo resultados del modelo para todas las fases. Las amplitudes modeladas de las distintas fases, incluyendo fluctuaciones de $\frac{\delta\rho}{\rho}, \frac{\delta\mu}{\mu}$ y $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$, fueron analizadas. Respuesta de cada fase obtenida para cada fluctuación no varía en comportamiento, y en amplitud no significativamente. Por lo anterior y para modelos de cada fase consideramos en el análisis, el término de atenuación correspondiente a la variación de λ, enfocandonos en la fluctuación de $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$.

Datos del terremoto de Bolivia, son bien registrados en distancias entre $114° - 159°$. Vemos en la figura 3.2, por ejemplo, registros en estaciones CAN (120°), WUS (140°), XAN (159°).

Para resultados obtenidos del modelo de algunas fases, en distancias correspondientes a estaciones con registro del sismo de Bolivia, tenemos

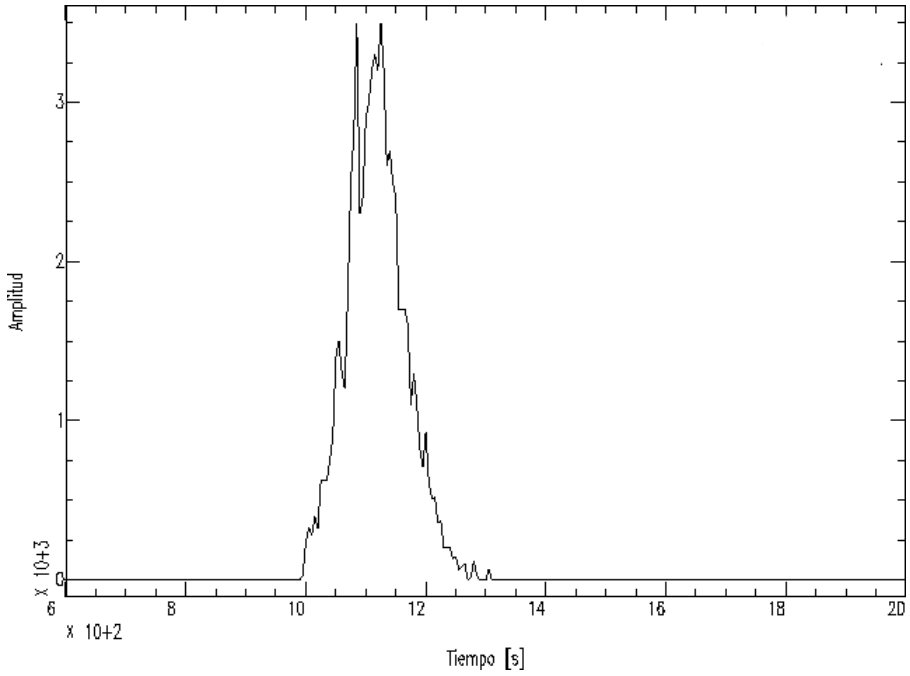

Figura 4.1: *Amplitud calculada con el modelo para la fase* $P^aK * K^bP$*, a una distancia de* $114°$.

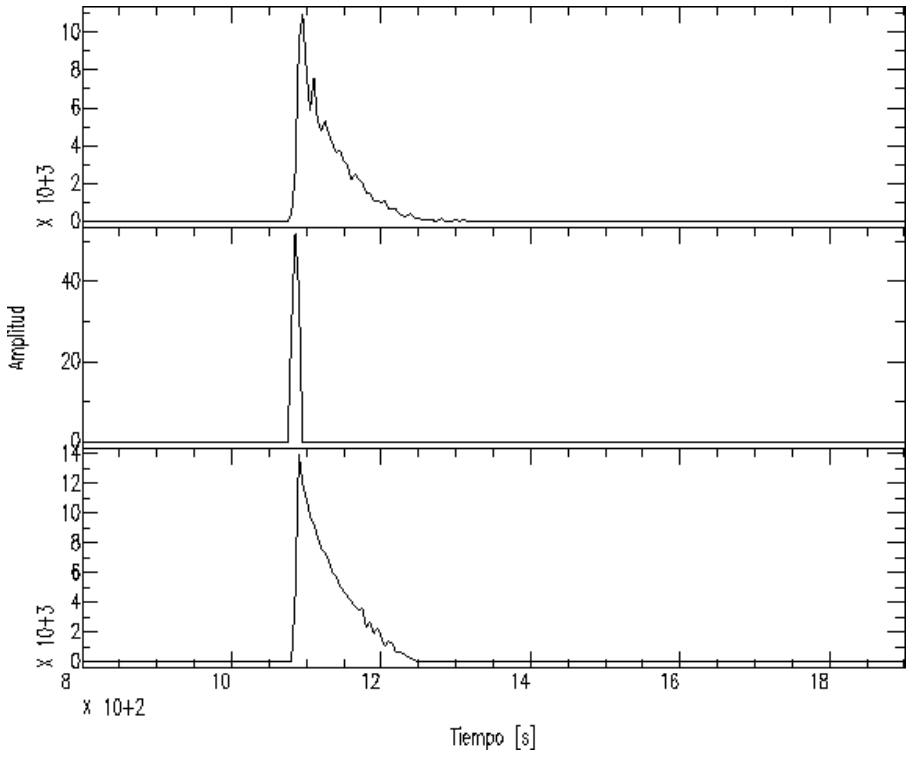

Figura 4.2: *Amplitud calculada con el modelo para las fases* $P^aK * K^bP$ *(arriba),* $P^aK * K^sP$ *(al medio), y* ${}^dP * P^bKP$ *(abajo) a una distancia de* $140°$.

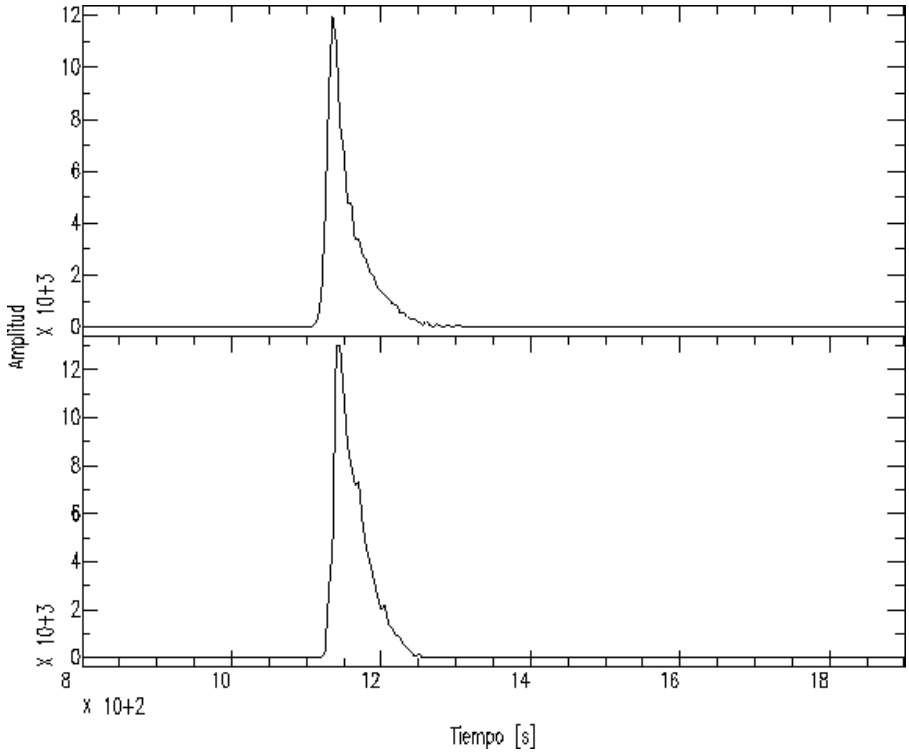

Figura 4.3: *Amplitud calculada con el modelo para las fases* P^aK*K^bP *(arriba) y* ${}^dP*P^bKP$ *(abajo), a una distancia de* 153°.

En las gráficas 4.1, 4.1, 4.3, muestran las amplitudes calculadas con el modelo para las fases a diferentes distancias. Para identificar las posibles zonas mas heterogéneas de la tierra es necesario el análisis de la interacción de cada fase anteriormente graficada con las capas del interior terrestre. Recordamos que ondas utilizadas $PKIKP$, PKP, PP, según región donde se produce el scattering se descomponen en ${}^aP*P^s$, ${}^aP*P^b$, ${}^dP*P^s$, ${}^dP*P^b$,${}^aP*P^bKP$,${}^aP*P^sKP$,${}^dP*P^bKP$,${}^dP*P^sKP$, PK^aP*P^s, PK^aP*P^b, PK^dP*P^s, PK^dP*P^b, P^aK*K^sP, P^aK*K^bP, P^dK*K^sP, P^dK*K^bP, PK^aI*I^sKP, PK^aI*I^bKP, PK^dI*I^sKP, PK^dI*I^bKP. Indicando el superindice a y d si el scattering se ha producido antes o después del punto minimo de la trayectoria de un rayo (punto de retorno). Signo * indica lugar donde ocurre scattering y superíndices s y b, si rayos luego del scattering, suben o bajan para ir a la superficie.

4.1.2. Fases Modeladas

Genero envoltorias de sismogramas para ${}^aP*P^s$, ${}^aP*P^b$, ${}^dP*P^s$, ${}^dP*P^b$,${}^aP*P^bKP$,${}^aP*P^sKP$,${}^dP*P^bKP$,${}^dP*P^sKP$, PK^aP*P^s, PK^aP*P^b, PK^dP*P^s, PK^dP*P^b, P^aK*K^sP, P^aK*K^bP, P^dK*K^sP, P^dK*K^bP, PK^aI*I^sKP, PK^aI*I^bKP, PK^dI*I^sKP, PK^dI*I^bKP. En una misma ventana de tiempo, colocamos envoltoria de datos observados y resultados obtenidos del modelo. Se compara directamente los tiempos de llegada de las fases, amplitud y forma de decaimiento. Las estaciones KIV, WUS, HYB, BB18 y XAN, son las mas representativas y son graficadas a continuación.

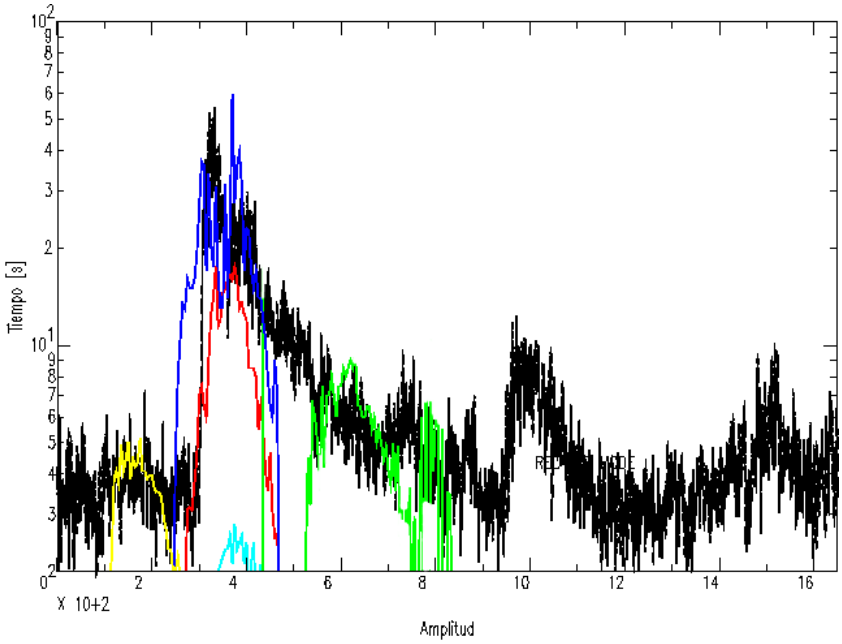

Figura 4.4: *Envoltoria observada en la estacion KIV a una distancia epicentral de* 114°, *comparado con el resultado del modelo para las fases* P^aK*K^bP *(en color rojo),* P^dK*K^bP *(verde),* P^dK*K^sP *(azul),* ${}^dP*P^b$ *(amarillo) y para fase* ${}^dP*PKP^b$ *(celeste). Se observa que para el caso de la fase* P^aK*K^bP *(en color rojo), es la que mas se aproxima a lo observado. Esto significa que una zona heterogénea en el núcleo externo, es una posibilidad.*

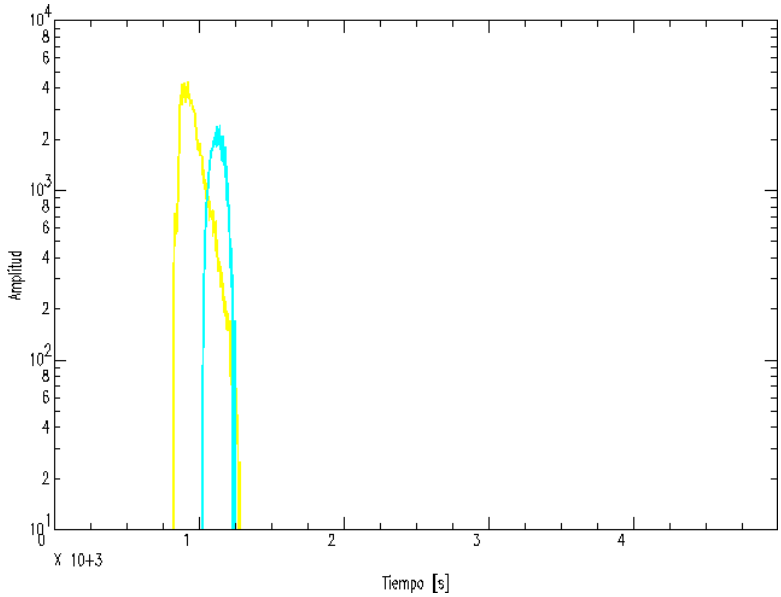

Figura 4.5: *Comparación de las amplitudes resultantes del modelo para fases scattereadas en el manto,* ${}^dP*PKP^b$ *(celeste) y* ${}^dP*P^b$ *(amarillo) en estación KIV a una distancia epicentral de* 114°.

En la figura 4.4, con registro a una distancia epicentral 114°, los resultados del modelo que mas se aproximan a lo observado en estación KIV, son P^dK*K^sP y ${}^dP*PKP^b$. Vemos que fases scattereadas

en el núcleo externo son las que se ajustan mejor a los datos. Además de ondas scattereadas en el núcleo externo, una onda que también se ajustaría es la ${}^{d}P * PKP^{b}$, scattereada en el manto antes de entrar al núcleo externo. Se comparan factores de escala de fases scattereadas en el manto, en la figura 4.5.

La amplitud depende linealmente del término de fluctuación, por ejemplo, $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$. El valor de fluctuación es un valor arbitrario, pero queda restringido en la comparación con los datos, en este caso restringido en el manto. A distancia 114° se observa en figura 4.5, que fase ${}^{d}P * P^{b}$ tiene mayor amplitud que ${}^{d}P * PKP^{b}$, sin embargo en coda vemos que queda por debajo de la señal. Comparando factores de escala de fases, ${}^{d}P * P^{b}$ y ${}^{d}P * PKP^{b}$, vemos que si el aporte de ${}^{d}P * P^{b}$ no es parte de la coda, entonces la contribución de fase ${}^{d}P * PKP^{b}$ no será significativa. Para una misma fluctuación no se observa ${}^{d}P * P^{b}$ por lo que tampoco ${}^{d}P * PKP^{b}$.

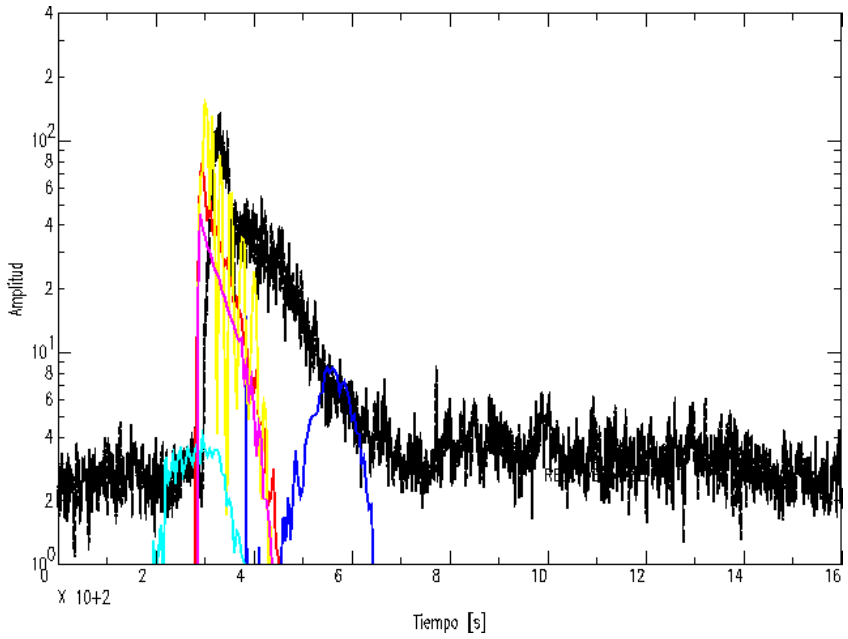

Figura 4.6: *Envoltoria observada en la estación WUS a una distancia epicentral de* 140°*, comparado con el resultado del modelo para las fases* $P^{a}K * K^{b}P$ *(rojo),* $P^{a}K * K^{s}P$ *(verde),* $P^{d}K * K^{b}P$ *(azul),* $P^{d}K * K^{s}P$ *(amarillo),* ${}^{d}P * P^{b}$ *(celeste) y fase* ${}^{d}P * P^{b}KP$ *(lila). Se observa que fases* $P^{a}K * K^{b}P$ *(rojo),* $P^{d}K * K^{s}P$ *(amarillo), y* ${}^{d}P * P^{b}KP$ *(lila), son las que mas se aproximan al inicio de coda observada. Esto significa que una zona heterogénea en el núcleo externo, es una posibilidad, y tambien lo es el manto con fase* ${}^{d}P * P^{b}KP$.

Para una misma fluctuación con valor restringido en el manto, consideramos factor de escala para comparar en la figura 4.7, las amplitudes resultantes del modelo para fases, ${}^{d}P{*}P^{b}$ y ${}^{d}P{*}PKP^{b}$. Vemos que esta ultima fase tiene mayor amplitud, por lo que para distancia 140°, scattering en el manto si aportaría en la coda, pero menos significativamente que ondas procedentes del núcleo externo.

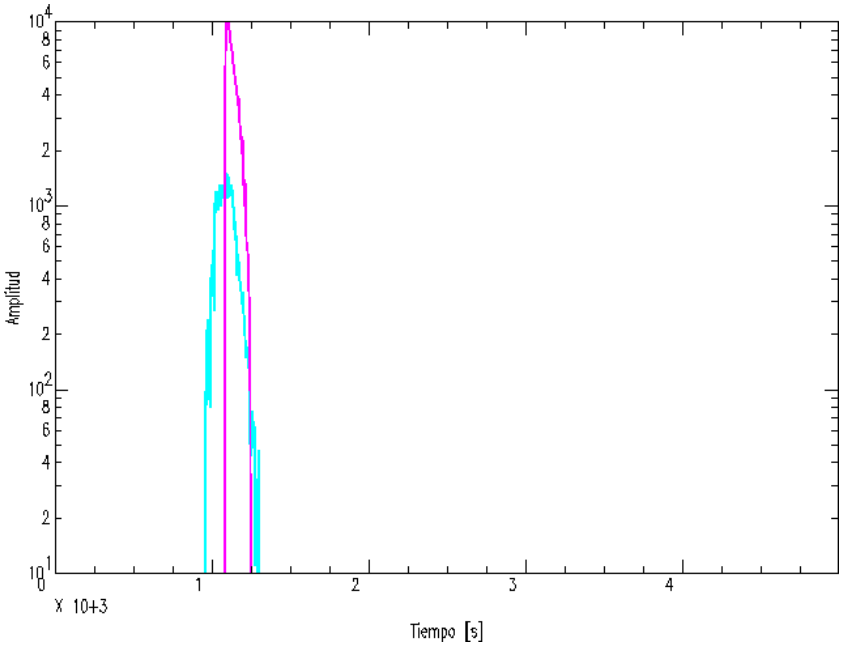

Figura 4.7: *Comparación de las amplitudes resultantes del modelo para fases* ${}^{d}P*PKP^{b}$ *(lila) y* ${}^{d}P*P^{b}$ *(celeste), en estación WUS a una distancia epicentral de* 140°.

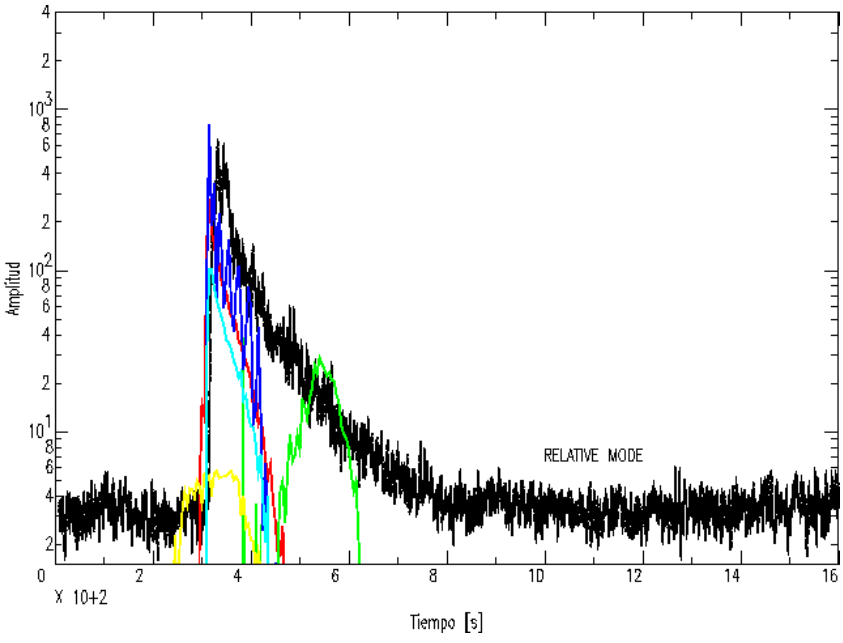

Figura 4.8: *Envoltoria observada en la estación HYB a una distancia epicentral de* 147°, *comparado con el resultado obtenido del modelo para las fases* $P^{a}K*K^{b}P$ *(rojo),* $P^{d}K*K^{b}P$ *(verde),* $P^{d}K*K^{s}P$ *(azul),* ${}^{d}P*P^{b}$ *(amarillo) y para fase* ${}^{d}P*P^{b}KP$ *(celeste). Se observa que fases* $P^{a}K*K^{b}P$ *(rojo),* $P^{d}K*K^{s}P$ *(azul) y* ${}^{d}P*P^{b}KP$ *(celeste), son las que mas se aproximan a lo observado. Esto significa que una posibilidad es la existencia de heterogeneidades en el núcleo externo, y también en el manto como contribución en este rango de frecuencias.*

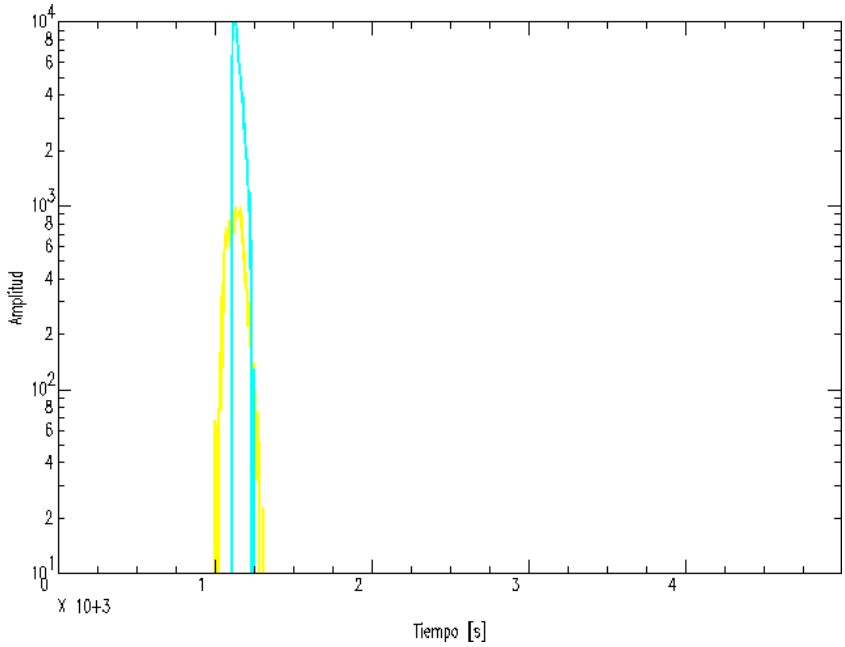

Figura 4.9: *Comparación de las amplitudes resultantes del modelo para fases* ${}^{d}P * PKP^{b}$ *(celeste) y* ${}^{d}P * P^{b}$ *(amarillo), en estación HYB a una distancia epicentral de* 147°.

Para una misma fluctuación, comparamos en figura 4.8, los factores de escala de fases, ${}^{d}P * P^{b}$ (amarillo) y ${}^{d}P * PKP^{b}$ (celeste), viendo que esta ultima fase tiene mayor amplitud, por lo que para distancia 147°, scattering en el manto si aportariía en la coda, pero en menor amplitud que fases del núcleo externo.

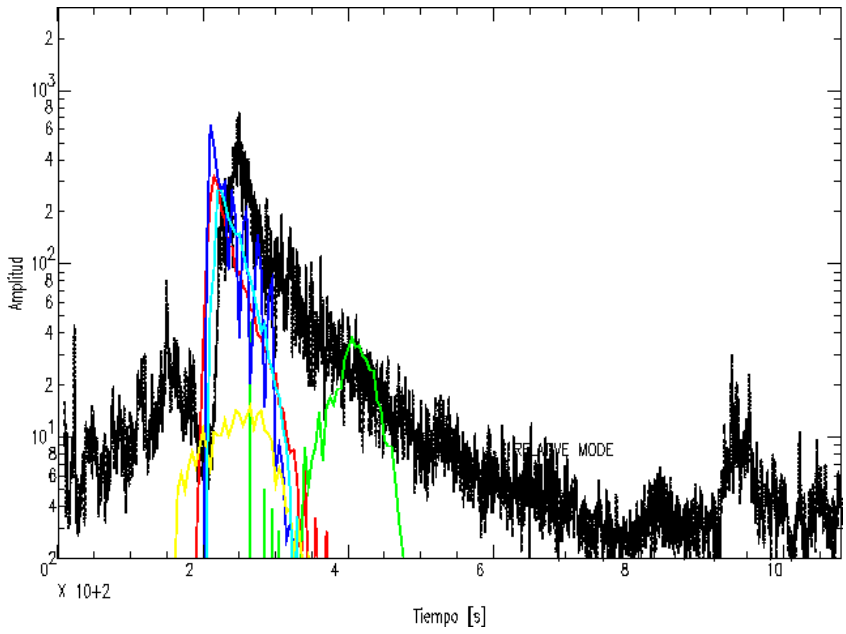

Figura 4.10: *Envoltoria observada en la estación BB18 a una distancia epicentral de* 153°, *comparado con el resultado del modelo para las fases* $P^{a}K * K^{b}P$ *(rojo),* $P^{d}K * K^{b}P$ *(verde),* $P^{d}K * K^{s}P$ *(azul),* ${}^{d}P * P^{b}$ *(amarillo) y para fase* ${}^{d}P * P^{b}KP$ *(celeste).*

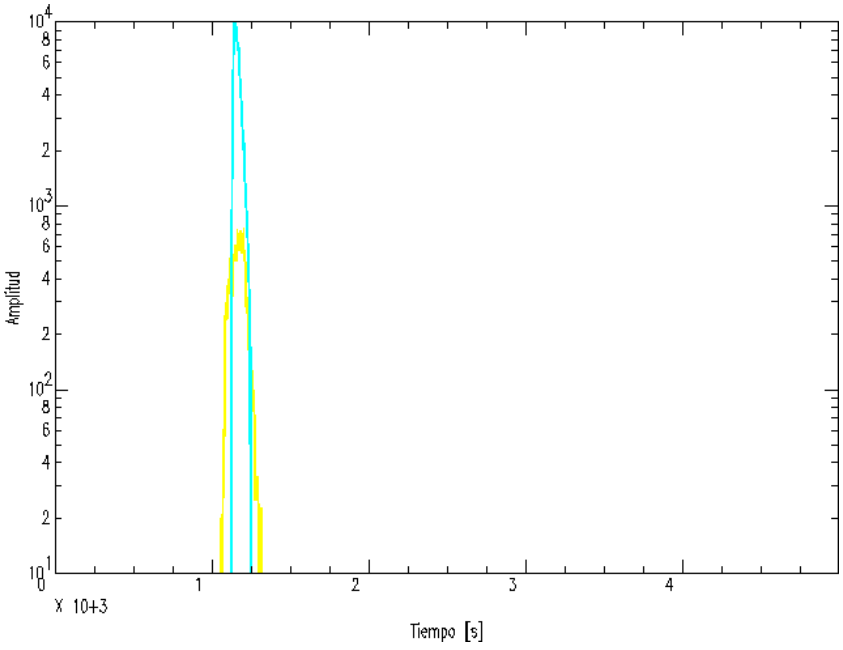

Figura 4.11: *Comparación de las amplitudes resultantes del modelo para fases* ${}^{d}P * PKP^{b}$ *(celeste) y* ${}^{d}P * P^{b}$ *(amarillo) en estación BB18 a una distancia epicentral de* 153°.

Para un valor arbitrario de fluctuación restringido en el manto, comparamos en figura 4.11 factores de escala de fases, ${}^{d}P * P^{b}$ (amarillo) y ${}^{d}P * PKP^{b}$ (celeste). Vemos que esta ultima es mayor, por lo que para distancia 153°, scattering en el manto si aportaría en la coda.

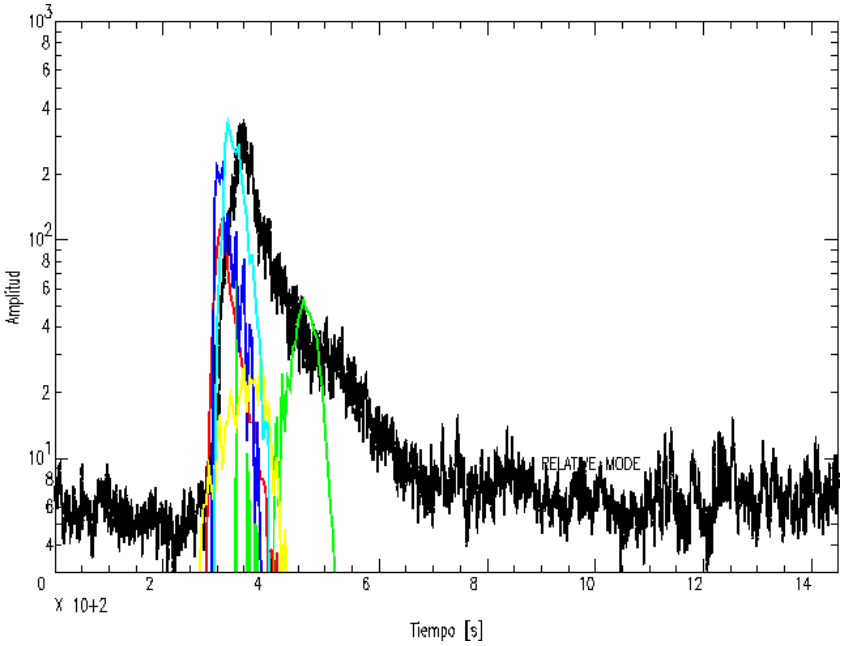

Figura 4.12: *Envoltoria observada en la estación XAN a una distancia epicentral de* 159°*, comparada con resultados del modelo para fases,* $P^{a}K * K^{b}P$ *(rojo),* $P^{d}K * K^{b}P$ *(verde),* $P^{d}K * K^{s}P$ *(azul),* ${}^{d}P * P^{b}$ *(amarillo) y para fase* ${}^{d}P * P^{b}KP$ *(celeste).*

A una distancia epicentral de 159° en figura 4.12, los resultados del modelo que mas se aproximan a lo observado son $P^aK * K^bP$ (rojo), $P^dK * K^sP$ (azul) y ${}^dP * PKP^b$ (celeste). Vemos que fase scattereada en el manto y fases scattereadas en el núcleo externo son las que mejor se ajustan a los datos. A esta distancia la fase ${}^dP * PKP^b$, scattereada en el manto antes de entrar al núcleo externo, se ajusta bien a la llegada de la coda, y en cuanto a amplitud. Consideramos factor de escala para comparar las fases scattereadas en el manto, y ver cuan significativas son, considerando una misma fluctuación, en la figura 4.13.

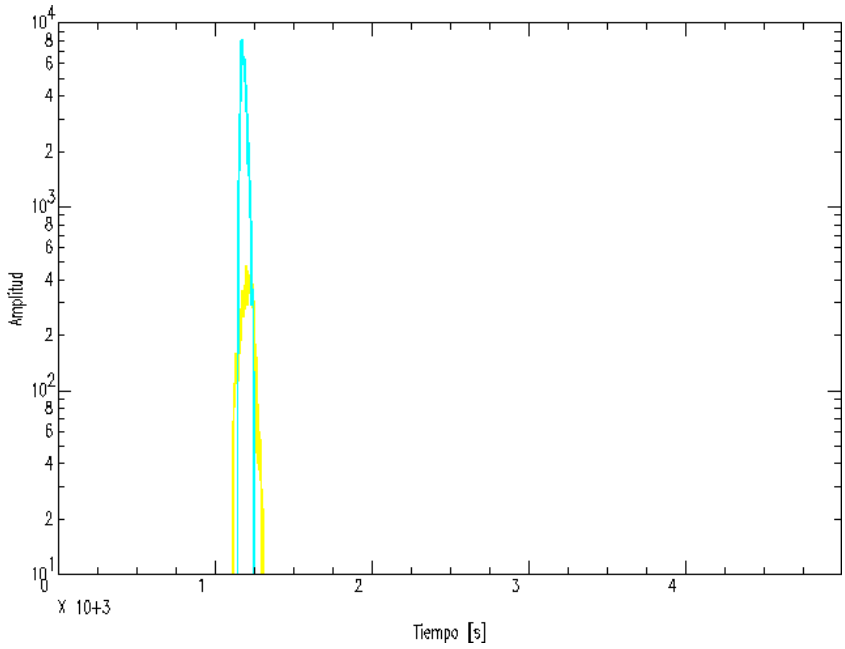

Figura 4.13: *Comparación de las amplitudes resultantes del modelo para fases,* ${}^dP * PKP^b$ *(rojo) y* ${}^dP * P^b$ *(negro) en estación XAN a una distancia epicentral de* 159°.

Considerando factor de escala para fases scattereadas en el manto, a distancia 159° se observa en figura 4.13, que fase ${}^dP * P^b$ (amarillo) tiene menor amplitud que ${}^dP * PKP^b$ (celeste). Vemos que el aporte de ${}^dP * P^b$ queda dentro de la coda, y que la contribución de fase ${}^dP * PKP^b$ es significativa. Para esta distancia scattering en el manto tambien contribuiría a la coda.

En las figuras; 4.4, 4.6, 4.8, 4.10 y 4.12, vemos la comparación de datos registrados para el sismo de Bolivia, y resultados obtenidos del modelo, para las fases a distintas distancias. Vemos que codas sísmicas, en estaciones con buenos registros comienzan aproximadamente con ondas provenientes del núcleo externo, comportamiento que se repite en todas las estaciones estudiadas, existiendo un margen de error en el tiempo de llegada para resultados del modelo.

Forma de la coda evidencia una zona amplia de heterogeneidades, y se extiende notablemente en el tiempo ($\sim 300s$ después de llegada de fase $PKiKP$), comparandolo con respuesta de la fuente para el sismo de Bolivia de $\sim 20s$. Al comparar el inicio de la coda, con resultados del modelo vemos que el comiezo y su forma pueden ser asociadas con ondas que vienen del núcleo externo, producto de scattering en heterogeneidades en esa zona. El mejor candidato responsable de la coda, es el núcleo externo, debido a que responde bien considerando tiempo de llegada y formas de las fases modeladas, en todas las distancias.

Aportes de heterogeneidades en el manto a la coda debiesen notarse en la llegada de la fase $Pdiff$ para los datos registrados, con fase PP resultante del modelo, lo que no se aprecia en la comparaciones.

Fase que si aportaría a la coda en cuanto a scattering en el manto, para grandes distancias como se vio en las figuras 4.7, 4.9, 4.11, 4.13, es ${}^{d}P * PKP^{b}$ (celeste). Fase modelada ${}^{d}P * PKP^{b}$ tiene mayor amplitud que la fase ${}^{d}P * P^{b}$, por lo que si aportaría, en conjunto con scattering en el núcleo externo, pero menos significativamente.

El modelar en forma conjunta fases que interactúan con el interior terrestre nos da una visión global de las heterogeneidades. Y con esto podemos ver que zonas son las que mas aportan en cuanto a heterogeneidades a la coda, y los tiempos de llegada de cada fase scattereada.

Capítulo 5

Conclusiones y Discusiones

Los datos del terremoto de Bolivia evidencian la coda de ondas sísmicas, que se pueden explicar como producto de heterogeneidades. Los resultados del modelo se ajustan con las observaciones, como vimos en las figuras 4.4, 4.6, 4.8, 4.10, y 4.12. Las que mas coinciden con la llegada de la coda, son las ondas scattereadas en el núcleo externo. Las codas sísmicas en todas las estaciones comienzan con la llegada de ondas procedentes del núcleo externo, tales como $P^aK * K^sP, P^aK * K^bP, P^dK * K^sP, P^dK * K^bP$, correspondientes a ondas PKP scattereadas antes o después de su punto mínimo.

Para el calculo de amplitud consideramos scattering de las ondas P y PKP, ya sea antes o después de su punto mínimo, como, ${}^aP * P^bKP, {}^aP * P^sKP, {}^dP * P^bKP, {}^dP * P^sKP, P^aK * K^sP, P^aK * K^bP, P^dK * K^sP, P^dK * K^bP$. Teniendo la amplitud resultante del modelo para fases que interactuan con el interior terrestre, y al comparar con los datos registrados en estaciones, se puede concluir que el modelo del núcleo externo es el mas apropiado. Debido a que fases scattereadas en el núcleo externo se ajustan mejor a la coda con los tiempos de llegada y forma de decaimiento (en cada distancia epicentral analizada).

Vemos que las fases provenientes del núcleo externo son las que mas se aproximan a los datos y para todas las distancias. Si fuera el núcleo externo el responsable de la coda, se podría explicar la fama de alta complejidad de CMB (frontera núcleo-externo), derivada de estudios de Pdiff. Estudios que hasta el momento se han enfocado en dar como zona mas heterogénea a CMB, y a su entorno sobre esta frontera. Si pensamos en el núcleo externo como el responsable, estaríamos tomando la zona en el entorno bajo esta frontera, siendo este enfoque igual de válido.

La coda sísmica tambien podría ser producto de scattering en el manto, pero vemos en figuras 4.5, 4.7, 4.9, 4.11, 4.13., que amplitud de fases $P^d *^b P$, ${}^dP * PKP^b$ no son capaces de explicar la llegada ni la amplitud de la coda, en registros de las estaciones en estudio. A pesar de que en estaciones BB18 (figura 4.11) y XAN (figura 4.13) a grandes distancias, fases $P^d *^b P$, ${}^dP * PKP^b$, llegan en un tiempo que aportaría, fases quedan por debajo del aporte que haría el núcleo. Si fuera el manto la zona mas heterogénea y responsable de la coda sísmica, se notaría en llegada de Pdiff y veríamos luego de fase $P^d *^b P$ la llegada de energía, que constituiría la coda, en todas las estaciones.

La posibilidad que heterogeneidades en el núcleo externo sean las que originan la coda sísmica, no es del todo intuitivo, debido a que el núcleo externo es líquido y posee una temperatura muy alta. Campo magnetico en interacción con ondas sísmicas produciría entonces efectos en las fases con las cuales tiene interacción. El campo magnético al interactuar con las ondas sísmicas produciría efectos sobre la amplitud y extensión de la coda, lo que debe ser estudiado mas adelante.

Al enfocarnos en la forma de la primera parte de la coda, vemos que se modela bien con single-scattering, producto de heterogeneidades en el núcleo externo, sin considerar el desfase en el tiempo de llegada. La segunda mitad de la coda, luego de su peak no se explica bien con aproximación de single-scattering, para fases provenientes del núcleo externo. Las fases que interactuan con heterogeneidades del núcleo externo, no son bien representada por esta aproximación, ya que vemos en las figuras 4.4,

4.6, 4.8, 4.10, y 4.12, que resultados del modelo para las fases no se extienden en el tiempo. Podemos concluir que para un mayor y mejor ajuste en toda la coda registrada, se necesitaría utilizar teoría de multiple-scattering, ya que esta aproximación considera una extensión de energía mucho mas eficiente en el tiempo. Aproximación de multiple-scattering podría modelar mejor los tiempos de llegada de fases que vienen del núcleo externo, y que responden bien a forma del decaimiento.

Como puntos a considerar para estudios posteriores estan, el aporte de las fases $PKIKP$ scatte-readas a la coda sísmica, representando a heterogeneidades en el núcleo interno. Además analizar de que forma puede afectar el campo magnético terrestre a las ondas que pasan por el núcleo externo. Se debe incluir teoría de multiple-scattering para un mejor ajuste de la segunda parte de la coda, y el efecto que este produciría en cuanto a extensión de la coda en el tiempo.

Apéndice A

A.1. Función de Green

Para obtener la forma de la función de Green utilizada en teoría de Scattering (Sección 2.6.1), consideramos la ecuación de la elastodinámica en un medio elástico, de la forma

$$\rho \ddot{u}_i = \partial_j \tau_{ji} + f_i \tag{A.1}$$

Mediante la ley de Hooke, escribimos el tensor de esfuerzo,

$$\tau_{ji} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

con C_{ijkl} tensor de rigidez. Para un medio homogéneo e isotrópico lo escribimos de la forma

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right)$$

donde λ y μ son los parámetros de Lamé. Considerando constantes los parámetros de Lamé, tenemos

$$\partial_j \tau_{ji} = (\lambda + \mu) \, \partial_i \partial_k u_k + \mu \partial^2 u_i \tag{A.2}$$

Si reemplazamos ecuación (A.2) en ecuación (A.1) y hacemos $\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ y $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$, tenemos

$$\ddot{u}_i - \alpha^2 \partial_i \partial_k u_k + \beta^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l u_m = f_i$$

Consideremos una fuerza puntual de manera que

$$f_i = f_{0i} \delta \left(x_i - x_{0i} \right) \delta \left(t - t_0 \right) = f_0 \delta \left(x_i - x_{0i} \right) \delta \left(t - t_0 \right) a_i$$

con a_i vector unitario. Suponemos fuerza dependiendo radialmente,

$$a_i^2 \delta \left(r_i - r_{0i} \right) = - \frac{a_i}{4\pi} \partial^2 \left(\frac{1}{R} \right) \tag{A.3}$$

con $R = |r_i - r_{0i}|$, podemos escribir la ecuación (A.3) de la forma

$$a_i \delta\left(r_i - r_{0i}\right) = -\frac{F_0}{4\pi}\left(\partial_i \partial_j \frac{a_j}{R} - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l \frac{a_m}{R}\right)$$

Además

$$\ddot{u}_i - \alpha^2 \partial_i \partial_k u_k + \beta^2 \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l u_m = -\frac{F_0}{4\pi\rho}\left(\partial_i \partial_k \frac{a_k}{R} - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l \frac{a_m}{R}\right)\delta\left(t - t_0\right)$$

Haciendo la transfomada de Fourier llegamos a la expresión de la ecuación de la elastodinámica de la forma

$$-\omega^2 u_i - \alpha^2 \partial_i \partial_k u_k + \beta^2 \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l u_m = -\frac{F_0 g\left(\omega\right)}{4\pi\rho}\left(\partial_i \partial_k \frac{a_k}{R} - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l \frac{a_m}{R}\right) \tag{A.4}$$

Asumimos que $u_i = u_i^{(\alpha)} + u_i^{(\beta)}$ de manera tal que

$$\epsilon_{ijk}\partial_j u_k^{(\alpha)} = 0$$

$$\partial_j u_j^{(\beta)} = 0$$

Con $u_i^{(\alpha)}$ parte irrotacional y $u_i^{(\beta)}$ parte solenoidal del vector desplazamiento. Así para $F_i = 0$, tenemos

$$\omega^2\left(u_i^{(\alpha)} + u_i^{(\beta)}\right) + \alpha^2 \partial_i \partial_k u_k^{(\alpha)} - \beta^2 \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l u_m^{(\beta)} = 0$$

Con

$$\partial^2 u_i^{(\alpha)} = \partial_i \partial_k u_k^{(\alpha)} - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l u_m^{(\alpha)}$$

$$\Longrightarrow \partial^2 u_i^{(\alpha)} = \partial_i \partial_k u_k^{(\alpha)}$$

$$\partial^2 u_i^{(\beta)} = \partial_i \partial_k u_k^{(\beta)} - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l u_m^{(\beta)}$$

$$\Longrightarrow \partial^2 u_i^{(\beta)} = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l u_m^{(\beta)}$$

Luego

$$\omega^2 u_i^{(\alpha)} + \omega^2 u_i^{(\beta)} + \alpha^2 \partial^2 u_i^{(\alpha)} + \beta^2 \partial^2 u_i^{(\beta)} = 0 \tag{A.5}$$

$$\Longrightarrow \alpha^2\left(\partial^2 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right) u_i^{(\alpha)} + \beta^2\left(\partial^2 + \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) u_i^{(\beta)} = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha^2\left(\partial^2 + k_\alpha^2\right) u_i^{(\alpha)} + \beta^2\left(\partial^2 + k_\beta^2\right) u_i^{(\beta)} = 0$$

donde $k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}$ y $k_\beta = \frac{\omega}{\beta}$. La ecuación (A.5) se satisface de manera identica si $u_i^{(\alpha)}$ y $u_i^{(\beta)}$ satisfacen

$$\left(\partial^2 + k_\alpha^2\right) u_i^{(\alpha)} = 0 \tag{A.6}$$

$$\left(\partial^2 + k_\beta^2\right) u_i^{(\beta)} = 0 \tag{A.7}$$

La solución homogénea se encuentra resolviendo (A.6) y (A.7) las cuales supondremos son S_α(ondas longitudinales, P) y S_β(ondas transversales, S). Combinando estas soluciones, obtenemos la solución general. Supongamos que ecuación tiene la forma

$$u_i\left(r_i, \omega\right) = \frac{F_0 g\left(\omega\right)}{\rho}\left(\partial_i \partial_k a_k S_\alpha - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l a_m S_\beta\right) \tag{A.8}$$

reemplazando en (A.4) tenemos

$$F_0 g\left(\omega\right)\left(-\omega^2 \partial_i \partial_j a_j S_\alpha + \omega^2 \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l a_m S_\beta - \alpha^2 \partial_i \partial^2 \partial_k u_k S_\alpha + \beta^2 \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l \partial^2 a_m S_\beta\right)$$

$$= -\frac{F_0 g\left(\omega\right)}{4\pi\rho}\left(\partial_i \partial_j \frac{a_j}{R} - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l \frac{a_m}{R}\right)$$

Al agrupar términos resulta

$$\partial_i \partial_j \left(-\omega^2 a_j S_\alpha - \alpha^2 \partial^2 a_j S_\alpha + \frac{a_j}{4\pi R\rho}\right) + \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_l \left(\omega^2 a_m S_\beta + \beta^2 \partial^2 a_m S_\beta - \frac{a_m}{4\pi R\rho}\right) = 0$$

Ecuación que se satisface idénticamente para

$$\left(\partial^2 + k_\alpha^2\right) S_\alpha = \frac{1}{4\pi R\rho\alpha^2}$$

$$\left(\partial^2 + k_\beta^2\right) S_\beta = \frac{1}{4\pi R\rho\beta^2}$$

Con respectivas soluciones de la forma

$$S_\alpha = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\left[\frac{1 - e^{-ik_\alpha R}}{R}\right]$$

$$S_\beta = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\left[\frac{1 - e^{-ik_\beta R}}{R}\right]$$

Si reemplazamos en ecuación (A.8), obtenemos

$$u_i\left(r_i, \omega\right) = \frac{F_0 g\left(\omega\right)}{4\pi\omega^2\rho}\left\{\partial_i \partial_j \left[\frac{1 - e^{-ik_\alpha R}}{R}\right] a_j - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j \partial_l \left[\frac{1 - e^{-ik_\alpha R}}{R}\right] a_m\right\} \tag{A.9}$$

$$= \frac{F_0 g\left(\omega\right)}{4\pi\mu}\left\{\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\delta_{ij} + \partial_i \partial_j \left[\frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{k_\beta^2 R}\right]\right\} a_j$$

$$= F_0 G_{ij}\left(R, \omega\right) a_j$$

donde

$$G_{ij} = \frac{g\left(\omega\right)}{4\pi\mu}\left\{\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\left[\frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{k_\beta^2 R}\right]\right\}$$

Donde G_{ij} es la función de Green en el dominio de la frecuencia.

Bibliografía

[1] Aki K (1973) Scattering of P waves under the Montana LASA. Journal of Geophysical Research 78: 1334–1346.

[2] Bataille K and Flatté SM (1988) Inhomogeneities near the core-mantle boundary inferred from short-period scattered PKP waves recorded at the global digital seismograph network. Journal of Geophysical Research 93: 15057–15064.

[3] Bataille K, Wu RS, and Flatte SM (1990) Inhomogeneities near the core-mantle boundary evidenced from scattered waves: A review. Pure and Applied Geophysics 132: 151–173.

[4] Bataille K and Lund F (1996) Strong scattering of short-period seismic waves by the core-mantle boundary and the Pdiffracted wave. Geophysical Research Letters 23: 2413–2416.

[5] Benites R, Aki K, and Yomogida K (1992) Multiple scattering of SH waves in 2D-media with many cavities. Pure and Applied Geophysics 138: 353–390.

[6] Bolt BA (1962) Gutenbergs early PKP observations. Nature 196: 122–124.

[7] Bolt BA (1970) PdP and PKiKP waves and diffracted PcP waves. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 20: 367–382.

[8] Bolt BA, ONeill M, and Qamar A (1968) Seismic waves near 110^o: Is structure in core or upper mantle responsible? Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 16: 475–487.

[9] Bullen KE and Burke-Gaffney TN (1958) Diffracted seismic waves near the PKP caustic. Geophysical Journal International 1: 9–17.

[10] Cleary JR and Haddon RAW (1972) Seismic wave scattering near the core-mantle boundary: A new interpretation of precursors to PKP. Nature 240: 549–551.

[11] Cleary JR, King DW, and Haddon RAW (1975) P-wave scattering in the Earths crust and upper mantle. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 43: 861–872.

[12] Davies DJ and Husebye ES (1972) Array analysis of PKP phases and their precursors. Nature (Physical Sciences) 232: 8–13.

[13] Doornbos DJ (1976) Characteristics of lower mantle inhomogeneities from scattered waves. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 44: 447–470.

[14] Doornbos DJ and Husebye ES (1972) Array analysis of PKP phases and their precursors. Physics of the Earth and Planetary Interiors 5: 387.

[15] Doornbos DJ and Vlaar NJ (1973) Regions of seismic wave scattering in the Earths mantle and precursors to PKP. Nature Physical Science 243: 58–61.

[16] Doornbos DJ (1976) Characteristics of lower mantle inhomogeneities from scattered waves. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 44: 447–470.

[17] Doornbos DJ (1978) On seismic wave scattering by a rough core-mantle boundary. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 53: 643–662.

[18] Earle PS and Shearer PM (1997) Observations of PKKP precursors used to estimate small-scale topography on the core-mantle boundary. Science 277: 667–670.

[19] Earle PS and Shearer PM (2001) Distribution of fine-scale mantle heterogeneity from observations of Pdiff coda. Bulletin of the Seismological Society of America 91: 1875–1881.

[20] Garnero EJ (2000) Heterogeneity of the lowermost mantle. Annual Review of Earth and Planetary Science 28: 509–537.

[21] Gutenberg B (1957) The boundary of the Earths inner core. Eos Trans. AGU 38: 750–753.

[22] Gutenberg B and Richter CF (1934) On seismic waves; I. Gerlands Beitrage Geophysika 43: 50–133.

[23] Gutowski PR and Kanasewich ER (1974) Velocity spectral evidence of upper mantle discontinuities. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 36: 21–32.

[24] Haddon RAW (1972) Corrugations on the CMB or transition layers between the inner and outer cores? (abstract). Eos Transactions of AGU 53: 600.

[25] Haddon RAW (1982) Evidence for inhomogeneities near the core-mantle boundary. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A 306: 61–70.

[26] Haddon RAW and Cleary JR (1974) Evidence for scattering of seismic PKP waves near the mantle-core boundary. Physics of the Earth and Planetary Interiors 8: 211–234.

[27] Hedlin MAH, Shearer PM, and Earle PS (1997) Seismic evidence for small-scale heterogeneity throughout Earths mantle. Nature 387: 145?150.

[28] Husebye ES, King DW, and Haddon RAW (1976) Precursors to PKIKP and seismic wave scattering near the mantlecore boundary. Journal of Geophysical Research 81: 1870–1882.

[29] Husebye E and Madariaga R (1970) The origin of precursors to core waves. Bulletin of the Seismological Society of America 60: 939–952.

[30] B.L.N Kennett, Iaspei 1991, Seismological Tables.

[31] King DW and Cleary JR (1974) A note on the interpretation of precursors to PKPPKP. Bulletin of the Seismological Society of America 64: 721–723.

[32] King DW, Haddon RAW, and Cleary JR (1973) Evidence for seismic wave scattering in the D0 layer. Earth and Planetary Science Letters 20: 353–356.

[33] King DW, Haddon RAW, and Husebye ES (1975) Precursors to PP. Physics of the Earth and Planetary Interiors 10: 103–127.

[34] Nguyen-Hai (1963) Propagation des ondes longitudinales dans le noyau terrestre. Annals of Geophysics 15: 285–346.

[35] Shearer PM and Earle PS (2004) The global short-period wavefield modelled with a Monte Carlo seismic phonon method. Geophysical Journal International 158: 1103–1117.

[36] Shearer PM, Hedlin MAH, and Earle PS (1998) PKP and PKKP precursor observations: Implications for the small-scale structure of the deep mantle and core. In: The Core-Mantle Boundary Region, Geodynamics 28, pp. 37–55.Washington, DC: American Geophysical Union.

[37] Shearer PM and Masters TG (1990) The density and shear velocity contrast at the inner core boundary. Geophysical Journal International 102: 491–498.

[38] Sacks IS and Saa G (1969) The structure of the transition zone between the inner core and the outer core. Year Book Carnegie Institute of Washington 69: 419–426.

[39] Thorne Lay and Terry C. Wallace, Modern global seismology.

[40] Tono Y and Yomogida K (1996) Complex scattering at the coremantle boundary observed in short-period diffracted P-waves. Journal of the Physics of the Earth 44: 729–744.

[41] Tono Y and Yomogida K (1997) Origin of short-period signals following P-diffracted waves: A case study of the 1994 Bolivian deep earthquake. Physics of the Earth and Planetary Interiors 103: 1–16.

[42] Vidale JE and Earle PS (2000) Fine-scale heterogeneity in the Earths inner core. Nature 404: 273–275.

[43] Vidale JE and Hedlin MAH (1998) Evidence for partial melt at the core-mantle boundary north of Tonga from the strong scattering of seismic waves. Nature 391: 682–685.

[44] Vinnik LP (1981) Evaluation of the effective cross-section of scattering in the lithosphere. Physics of the Earth and Planetary Interiors 26: 268–284.

[45] Wen L and Helmberger DV (1998) Ultra-low velocity zones near the core-mantle boundary from broadband PKP precursors. Science 279: 1701–1703.