

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA



**Partición de energía de ondas sísmicas producto de una
reología no lineal de daño y efecto de la superficie libre
en observaciones de partición de energía**

Catalina Ramos Domke

**Habilitación profesional
para optar al Título de Geofísico**

Febrero, 2013

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

**Partición de energía de ondas sísmicas producto de una
reología no lineal de daño y efecto de la superficie libre
en observaciones de partición de energía**

Catalina Ramos Domke

**Habilitación Profesional
para optar al Título de Geofísico**

Profesor Guía:

Dr. Klaus Bataille B.

Comisión:

Dr. J. Arturo Belmonte-Pool V., Dr. Matthew R. Miller



Febrero, 2013

Agradecimientos

Agradezco antes que nada a mis padres: Viviana y Boris. Es gracias a todo su amor, todo su apoyo y por creer ciegamente en mí incluso en los momentos en que yo no me creía capaz, que he llegado a esta instancia en mi vida. Este logro va dedicado a ellos.

También agradezco a mi hermana Andrea, por acompañarme en cada traspase en que escribí este informe y a Teodoro, por regalarme ratos de distracción cuando lo necesitaba.

Agradezco a Jorge, por todo su amor, su ayuda, su incondicionalidad y por tantas otras cosas. Porque ambos estamos viviendo esta linda etapa académica apoyándonos mutuamente. Agradezco por todo lo que tenemos ahora y por lo que tendremos en el futuro.

Agradezco de forma especial a mi profesor guía, Klaus Bataille, por su ayuda y su paciencia. Ha sido muy enriquecedor trabajar a su lado, he aprendido mucho. Más allá de este logro, también le agradezco sus consejos y apoyo en lo que a posibles futuros escenarios respecta. Junto con agradecer al profesor Klaus, también agradezco a los profesores Matt Miller y Arturo Belmonte, por aceptar ser parte de esta comisión y porque ellos tres son principalmente quienes me han entregado mi formación académica en la Geofísica de la Tierra Sólida.

Agradezco al Departamento de Geofísica por acogerme durante estos años, por la grata experiencia de estudiar esta carrera y porque terminé este proceso sintiéndome muy capaz de desempeñarme como Geofísico.

Finalmente, quiero agradecer a la Tierra, por ser un increíble sistema que me sorprende cada día y sobre el cual investigaré toda mi vida.

Resumen

Una de las manifestaciones de que la Tierra no es un medio ideal es la presencia de ondas scattereadas en eventos sísmicos, las cuales se hacen presentes en lo que se denomina la coda sísmica. La coda sísmica consiste en un grupo de llegadas posteriores a las ondas-S y según Aki (Aki, 1969) el scattering de ondas sísmicas se produce por la interacción de estas ondas con pequeñas heterogeneidades en la Tierra. Sin embargo, hay estudios que muestran que una reología no-lineal es también fuente de scattering de ondas.

La coda sísmica se considera un campo difusivo, consecuencia de lo cual la energía elástica se equiparticiona y esto puede ser observado en la razón de energía de eventos sísmicos locales. El modelo teórico de equipartición de energía que se ha usado en el pasado asume un medio con heterogeneidades, las cuales son la causa del scattering de las ondas sísmicas, olvidándose del factor de la reología no lineal y obteniéndose un valor de estabilización de 10.39 para un sólido de Poisson.

Este valor no es observado en datos reales y las justificación a esto dada por distintos autores involucra la presencia de ondas superficiales debido a la superficie libre y la existencia de capas de baja velocidad.

En este trabajo se muestra que las ondas scattereadas debido a una reología distinta a la lineal equiparticionan su energía elástica de una manera similar al caso de scattering por heterogeneidades, obteniéndose un valor de la equipartición de 8 y mostrando que es un factor que debe ser considerado al momento de interpretar la equipartición.

En cuanto al análisis numérico, se hace a través de diferencias finitas, pero la superficie libre, que es donde se encuentran los sensores, hace que la energía medida en superficie y la energía incidente estén relacionadas por un factor que depende del ángulo de incidencia de las ondas y que actúa como un filtro para ciertos ángulos, lo cual deja algunas interrogantes.

Índice

Índice de figuras	4
1. Introducción	6
1.1. La Tierra como medio no ideal	6
1.2. Scattering y el origen de la coda sísmica	7
1.3. Régimen de difusión, partición de la energía y observaciones de partición de energía en datos reales	9
1.4. Objetivos	10
1.4.1. Objetivo general	10
1.4.2. Objetivos específicos	11
1.5. Hipótesis	11
2. Metodología	12
I Modelos teóricos de partición de energía	14
3. Modelo teórico existente de partición de energía	15
3.1. Modelo de partición de energía para un campo difusivo	15
4. Propuesta de modelo de partición de energía usando una reología de daño	17
4.1. La densidad de energía elástica con parámetro de daño	17
4.2. Efecto de la reología de daño en la ecuación elastodinámica	18
4.3. Ecuación de movimiento de la onda scattreada usando el método de pertur- baciones	19

4.3.1.	Onda plana incidente	20
4.4.	Partición de energía usando desplazamientos de ondas scattereadas por reología de daño	20
4.4.1.	Funciones de Green para ondas-P y ondas-S	20
4.4.2.	Desplazamientos de la onda-P y onda-S scattereadas	21
4.4.3.	Estabilización en el tiempo de la razón de energía de ondas scattereadas por daño	21
4.4.4.	Expresión de la partición de energía	22
 II Modelo numérico de partición de energía y efecto de la superficie libre		24
5.	Modelación numérica de la partición de energía usada por otros autores	25
5.1.	Aproximación numérica de la energía observada en superficie usando diferencias finitas	25
5.2.	Arrays en el norte de Chile y eventos usados para modelar numéricamente la partición de energía en la coda a través de diferencias finitas	29
5.2.1.	Arrays de la red IPOC en el norte de Chile	29
5.2.2.	Algo sobre los eventos usados	31
5.3.	Algoritmo en Python que calcula la partición de energía con diferencias finitas	32
6.	Efecto de la superficie libre en la aproximación de la energía de ondas P y S	33
6.1.	La energía incidente en función de la energía observada en superficie	33
6.1.1.	Onda-P incidente	34
6.1.2.	Onda-SV incidente	36
6.1.3.	Onda-SH incidente	38
6.1.4.	Ondas P+SV+SH incidentes	38

III	Resultados, discusión y conclusiones	40
7.	Resultados	41
7.1.	Resultados: Modelo de partición de energía usando reología de daño	41
7.1.1.	Estabilización de la razón de energía de ondas scattereadas por daño tras un largo lapso de tiempo	41
7.2.	Resultados: Modelo numérico de partición de energía y efecto de la superficie libre	42
7.2.1.	El modelo numérico de partición de energía a través de diferencias finitas	42
7.2.2.	Relación entre la energía observada en superficie y la energía incidente	48
8.	Discusión	50
8.1.	Comparación y alcance de los distintos modelos de partición de energía de ondas elásticas	50
8.2.	Cuantificación del efecto de la superficie libre en las mediciones de energía compresional y de cizalle	52
8.2.1.	La relación entre la energía observada en superficie y la energía inci- dente: un filtro	52
8.2.2.	Energía incidente en función de la energía en superficie: superposición de energía versus superposición de desplazamientos	54
9.	Conclusiones	61
	Referencias	63
A.	Fuerza externa para una onda plana incidente	65
B.	Energía compresional	66
C.	Energía de cizalle	67

Índice de figuras

1.1. Sismograma de un evento local en que se observa la presencia de las ondas de coda tras la llegada de las fases primarias.	7
4.1. Tres modelos de sólido. De izquierda a derecha: Sólido elástico lineal (modelo Hookeano). Sólido elástico con fracturas en direcciones aleatorias. Sólido elástico usado por Lyakhovsky et al. con fracturas perpendiculares a la dirección de máxima tensión y que se abren o cierran dependiendo del esfuerzo aplicado.	18
5.1. Rotación de los ejes coordenados horizontales en un ángulo θ	26
5.2. Mapa de arrays de estaciones del norte de Chile que entregan la información de los eventos usados.	30
5.3. Sismicidad del día 21 de octubre de 2011 visto en la estación S202, componente Z, de la red IPOC.	31
5.4. Telesismicidad del día 21 de octubre de 2011 visto en la estación S202, componente Z, de la red IPOC. El filtro pasa-banda usado es entre 0.01 y 0.1 Hz.	31
6.1. Ondas sísmicas propagándose por un medio sólido e interactuando con la superficie libre. De izquierda a derecha: Onda-P incidente y sus ondas reflejadas P y SV; onda-SV incidente y sus ondas reflejadas SV y P; onda-SH y su onda reflejada SH.	34
7.1. Razón de energía para distintos eventos en el norte de Chile mostrados en cuatro gráficos.	47

7.2.	Relación entre la razón de energía incidente y la razón de energía observada en superficie en un sólido de Poisson, usando superposición de desplazamientos.	49
8.1.	La dependencia angular de los coeficientes que relacionan la energía de las ondas incidentes con la energía aparente compresional y de cizalle observada en la superficie libre para un medio de Poisson.	53
8.2.	Relación entre la partición de energía incidente y superficial con superposición de desplazamientos y superposición de energías.	55
8.3.	Partición de la energía en distintas bandas de frecuencia para el telesismo. .	58
8.4.	Observación de la estabilización de la razón de energía en la coda, Shapiro et al. (2000).	60

Capítulo 1

Introducción

1.1. La Tierra como medio no ideal

El primer acercamiento que se tiene con la sismología se hace a través de la suposición de un medio con una densidad constante, elástico, isotrópico y lineal, para el cual es posible encontrar dos tipos de ondas que se propagan a través de él: ondas P, relacionadas con el movimiento compresional o dilatacional de partículas, y ondas S, relacionadas con los movimientos de cizalle o transversales.

Ambos tipos de ondas satisfacen la ecuación de la onda, es decir, representan un movimiento armónico simple y como tal, su movimiento debería ser infinito en el tiempo, sin pérdidas de energía.

Sin embargo, la Tierra no es un medio infinito y se sabe que tampoco es un medio homogéneo, ni lineal. Por ejemplo, a partir de sismogramas, que representan el movimiento de partículas en una triada de coordenadas se puede apreciar que este movimiento es atenuado en el tiempo. Dicho de otra manera, la envolvente de un sismograma presenta un decaimiento temporal. Generalizando, el solo hecho de que una onda sísmica se propague por un medio como la Tierra la somete a lo que se conoce como atenuación sísmica.

La atenuación sísmica es un proceso que se suele considerar como combinación de dos mecanismos: uno de ellos es la absorción intrínseca, que se refiere a la conversión de energía vibracional en calor y el otro es pérdida por scattering, que consiste en una redistribución de la energía en el medio.

1.2. Scattering y el origen de la coda sísmica

La Figura 1.1 muestra un evento sísmico: la llegada de la onda S directa es seguida por un grupo de llegadas complejas, llamado “coda”. El análisis f-k de arrays de data sísmica muestra que la coda está compuesta de muchas ondeletas que llegan desde varias direcciones.

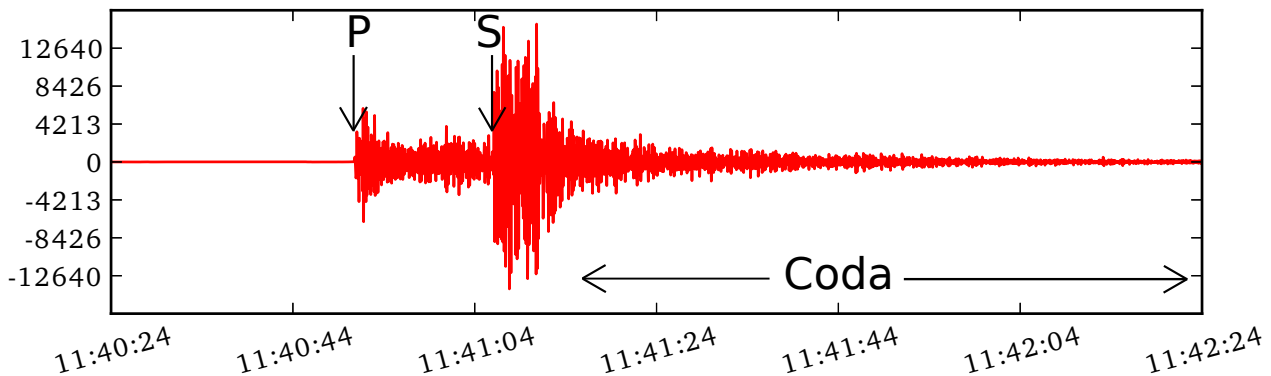


Figura 1.1: Sismograma de un evento local en que se observa la presencia de las ondas de coda tras la llegada de las fases primarias.

Se sabe que el scattering de ondas sísmicas de alta frecuencia es un mecanismo que causa un decrecimiento en la amplitud con la distancia de viaje (Aki, 1980), convirtiéndolo en una característica importante a ser cuantificada y con la cual se puede caracterizar físicamente el medio Tierra.

En el trabajo de Aki (Aki, 1969), por primera vez se sugiere que las ondas de scattering son una superposición de ondas generadas como la interacción de ondas directas con heterogeneidades en la corteza de la Tierra y pueden ser tratadas como la suma de muchos eventos independientes y que el instante en el que hay que buscar estas ondas de scattering es después del paso de todas las ondas primarias, es decir, en la coda.

Esta propuesta se convirtió posteriormente en una importante herramienta usada para investigar diversas propiedades de la Tierra. El descubrimiento de esta nueva herramienta requería del desarrollo de aspectos teóricos que lidiaran con los distintos regímenes de scattering para modelar la coda sísmica (Aki y Chouet, 1975). Su aplicación en la coda entregó una percepción de las propiedades de los scattereadores, los cuales están normalmente asociados con propiedades estadísticas de heterogeneidades de pequeña escala, a saber, el espectro de

potencia y fuerza de las densidades del material y fluctuaciones de velocidad de ondas (Fehler y Sato, 2003).

Sin embargo, no son pocos los estudios en que realizan pruebas en laboratorio que muestran que el comportamiento de la mayoría de las rocas cerca del punto de ruptura es no lineal, o estudian la propagación no lineal de ondas en un medio anisotrópico (Birch, 1961; Johnson y McCall, 1994; Zheng et al., 2006). Dado que el comportamiento no lineal de los materiales ha sido reconocido desde hace mucho como un factor importante, sería ilógico considerar la propagación de ondas por la Tierra como un proceso completamente lineal, por lo que se vuelve importante el estudio de los efectos que la no-linealidad tiene sobre estos fenómenos de propagación, especialmente cerca de zonas de fallas.

A pesar de que en un principio se pensaba que el origen de las ondas de coda era exclusivamente causa de la interacción de un frente de ondas con pequeñas heterogeneidades distribuidas en el interior de la Tierra, se han realizado estudios de scattering de ondas sísmicas debido a no linealidades o a la presencia de fracturas en el medio (por ejemplo, Nikolaev, 1989; Kawahara y Yamashita, 1992) y también se ha demostrado que la presencia de no linealidades en un medio elástico produce observaciones comparables al caso de un modelo de Tierra heterogénea, incluso si se tiene un medio no lineal homogéneo (Bataille y Calisto, 2008). En este último trabajo se trabaja con la energía de deformación escrita en una forma generalizada al cuarto orden en función de los invariantes del tensor de deformación y a partir de tal expresión, se usa el método de perturbaciones para separar las partes lineal y no lineal de la ecuación elastodinámica, de modo que se obtiene la contribución de esta última a la propagación de ondas. Esta propuesta netamente teórica permite concluir que una reología distinta a la lineal puede entregar resultados que explican de forma comparable al modelo de heterogeneidades la presencia de ondas scattereadas en datos reales. Ellos también concluyen que la diferencia principal entre los dos procesos (heterogeneidades y no-linealidad) se encuentra en la fuerza del campo scattereado, que para un proceso no lineal es proporcional a la amplitud de la onda incidente a la tercera potencia, mientras que para un medio heterogéneo es proporcional a la primera potencia, lo que da una base para comparar la forma en que decae la fuerza del campo scattereado a medida que las ondas incidentes se propagan alejándose de la fuente.

Lo anterior deja en evidencia que hay que tener en cuenta las características no lineales de los materiales que forman el medio Tierra al momento de estudiar e interpretar la coda sísmica de datos reales y su procedencia. También se deben tener en cuenta si se desea usar la coda sísmica por ejemplo para estudios de la estructura de la Tierra, ya que lo que en primera instancia pueda parecer ondas scattereadas por pequeñas heterogeneidades sea en realidad scattering producto de una reología no lineal en una zona de fractura.

1.3. Régimen de difusión, partición de la energía y observaciones de partición de energía en datos reales

La definición que da Weaver (Weaver, 1982) de un campo difuso a una frecuencia dada es la de un estado de excitación para el cual cada modo normal del sistema con una frecuencia natural en una vecindad de esa frecuencia dada es, estadísticamente hablando, excitado a igual energía. Esta definición emplea conceptos que son apropiados para un medio finito y también es inmediatamente aplicable a medios anisotrópicos o inhomogéneos.

Un campo difusivo en un medio sólido particionará su energía entre ondas transversales y dilatacionales en una fracción de la forma $R = 2 \left(\frac{c_d}{c_t} \right)^3$ (Weaver, 1982), siendo los términos de la fracción la velocidad de la onda dilatacional c_d y la velocidad de la onda transversal c_t respectivamente y es independiente del tiempo.

En este mismo trabajo el autor de alguna manera critica el significado de esta fórmula, en el sentido que los modos normales verdaderos de un sólido finito arbitrario no son puramente dilatacionales, transversales o superficiales. Para un sólido suficientemente largo ($\omega L/c \gg 1$, L : la menor dimensión lineal del sólido), el movimiento del sólido puede ser entendido como una superposición de pseudomodos débilmente acoplados, cada uno puramente transversal, dilatacional, o superficial. En el límite de un sólido infinito, esos acoplamientos tienden a cero y los pseudomodos se vuelven exactos.

La partición de la energía entre ondas P (dilatacionales) y ondas S (transversales) ha sido aparentemente observada en sismogramas reales (Shapiro et al., 2000; Hennino et al., 2001, Margerin et al., 2009) y el lapso en que ellos observan esta estabilización de la razón R corresponde precisamente a la llegada de las ondas de coda.

Los valores de estabilización de la razón R de energía que ellos obtienen son 7 ± 1 , en el caso del trabajo de Shapiro et al. y alrededor de 2.8 en el trabajo de Margerin et al. Estos valores son muy bajos para ser explicados por la razón de partición de energía de ondas transversales y dilatacionales de un campo difusivo en un medio sólido dada por Weaver, que para un medio de características similares a un sólido de Poisson debería tener un valor de aproximadamente 10.39.

Shapiro et al. (2000) y Margerin et al. (2009) consideran el carácter difusivo que tiene la coda y se aferran al modelo de partición de energía para un campo de estas características para explicar sus observaciones, justificando sus resultados con la influencia de las ondas superficiales, las cuales entran en juego en la superficie libre (Shapiro et al., 2000) y con la existencia de capas de baja velocidad (Margerin et al., 2009).

Estos argumentos pueden abrir una discusión interesante, ya que la discrepancia entre los bajos valores observados en datos reales en los dos trabajos mencionados anteriormente y el valor esperado usando la razón de partición para un campo difusivo, de aproximadamente 10.39 y la existencia de scattering debido a una reología distinta a la lineal dan cabida a otros argumentos que podrían explicar de una manera igualmente válida eventuales observaciones de equipartición de energía en la coda de distintos eventos sísmicos.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Hay dos objetivos generales en este trabajo. Por una parte, estudiar teóricamente la propagación de ondas sísmicas en un medio cuya reología es de daño para definir de este modo una razón de energía de ondas S a P y compararla con el modelo de partición de energía en que se usa un medio heterogéneo.

Por otra parte, discutir la pertinencia del modelo numérico que se ha utilizado en trabajos previos para obtener la razón de energía, esto es, con estimaciones de la energía de ondas P y S a través de diferencias finitas, esto dada la interacción de las ondas incidentes con la superficie libre.

1.4.2. Objetivos específicos

- Modelar numéricamente la razón de energía en la coda sísmica de datos reales a través del método de diferencias finitas, utilizando conjuntamente el lenguaje de programación Python, el software SAC y la herramienta de análisis sísmico ObsPy.
- Discutir los límites de validez y la influencia que los distintos modelos teóricos de partición de energía de ondas sísmicas puedan tener en función de valores observados de partición de energía en eventos reales.
- Especular sobre los distintos factores que pueden entrar en juego y los valores que se esperaría observar en la estabilización de la partición de energía en la coda, en caso de que se muestre que el modelo de diferencias finitas tiene limitaciones, esto en comparación al caso de un campo de ondas difusivo propagándose por un medio sólido.

1.5. Hipótesis

Este trabajo de Habilitación Profesional se divide en dos partes. Hay una hipótesis para cada una de esas partes:

Primero, que aceptando que una reología no lineal es también causante del scattering de ondas sísmicas que se propagan por el medio Tierra, es posible usar esta reología (en particular el caso de daño) para modelar teóricamente la partición de energía de ondas transversales a dilatacionales.

Segundo, que la obtención numérica de la razón de energía de ondas-S a ondas-P que en el pasado usaron distintos autores, a través de la aproximación por diferencias finitas de observaciones de desplazamiento realizadas en superficie, no es directamente aplicable para el estudio de la equipartición de energía en la coda sísmica debido a la interacción con la superficie libre.

Capítulo 2

Metodología

El trabajo de Habilitación Profesional se desarrollará de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Recopilación de material bibliográfico y antecedentes sobre partición de energía en la coda sísmica, régimen difusivo, publicaciones sobre observaciones de la partición de energía en un medio cualquiera, scattering por reología distinta a la lineal y atenuación intrínseca. Todo esto es necesario para la comprensión del problema en el que se trabaja y aportará las herramientas para el desarrollo del modelo teórico y los argumentos que puedan explicar las observaciones de datos reales.
2. Familiarización con el lenguaje de programación Python y el software SAC. En particular familiarización con las operaciones con matrices, obtención de gráficos, distintos filtros y procesamientos de datos en formato SAC o MiniSEED.
3. Desarrollo teórico del modelo de partición de energía en ondas sísmicas usando reología de daño. La finalidad de la obtención de este modelo es contribuir a tener más argumentos aparte de los existentes para mostrar que una reología distinta a la lineal produce scattering de ondas sísmicas, al igual que heterogeneidades en el medio por el cual las ondas se propagan.
4. Elección de red de estaciones sísmicas y eventos sísmicos para observar la partición de energía en la coda. La segunda parte de este trabajo consiste en modelar numéricamente la partición de energía en la coda sísmica a través de diferencias finitas, para lo cual se necesitan estaciones y eventos. En el norte de Chile existen tres arrays disponibles de

estaciones de la red CX (IPOC). Tomar tan solo un día entero de datos será suficiente para extraer varios eventos para la modelación de la partición de energía, ya que actualmente la sismicidad en el norte del país es muy alta, detectándose varias decenas de eventos por día. En cuanto al criterio para escoger los eventos, se escogerán varios eventos locales distintos en cuanto a la forma de onda y magnitud (amplitud de la señal).

5. Obtención numérica de la partición de energía usando diferencias finitas, a partir de los datos de los eventos reales seleccionados anteriormente a través de un modelo numérico creado usando Python, SAC y ObsPy. Python es un lenguaje de programación muy potente, posee muchas herramientas útiles en geofísica de la Tierra sólida (ObsPy es una de ellas) y es compatible con datos en formato SAC y MiniSEED entre otros. Además de ser un lenguaje libre está muy bien documentado en internet.
6. Discusión de los resultados obtenidos en las dos partes del trabajo de Habilitación Profesional. Esta discusión será en función del grado en que se cumplen o no se cumplen las hipótesis de trabajo, es decir, en función de la comparación de los modelos teóricos existentes de partición de energía y el obtenido a partir de reología de daño y también en función del tipo de interacción de las ondas incidentes con la superficie libre y su influencia en observaciones de energía al momento de estudiar numéricamente la partición de energía en la coda sísmica a través de diferencias finitas.

Parte I

Modelos teóricos de partición de energía

Capítulo 3

Modelo teórico existente de partición de energía

3.1. Modelo de partición de energía para un campo difusivo

En su trabajo del año 2009, Margerin et al. demuestran que en un medio infinito, heterogéneo y elástico la razón de energía de ondas S sobre P se estabiliza tras un lapso largo de tiempo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle W^S \rangle}{\langle W^P \rangle} = 2 \frac{\alpha_0^3}{\beta_0^3} \quad (3.1)$$

donde α_0 y β_0 son respectivamente las velocidades compresional y de cizalle en el receptor.

Nótese que el significado del límite al infinito es que la partición de energía se alcanza luego de que las ondas se hayan encontrado con una cantidad lo suficientemente grande de scattereadores en el medio.

Margerin et al., al igual que Ryzhik et al. (1996) en su trabajo definen la equipartición como ruido blanco distribuido por todos los modos del sistema, es decir, asumen que todos los modos tienen la misma energía, entonces lo que hacen es estudiar la partición de energía para un campo difusivo.

En el caso de Margerin et al., usan las ondas planas:

$$\mathbf{e}_P^P(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^P}{\rho_0^{1/2}(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad y \quad \mathbf{e}_s^{SH,SV}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^{SH,SV}}{\rho_0^{1/2}(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2)$$

En la ecuación (3.2) las ondas planas están definidas en términos de una exponencial, que

es solución de la ecuación de onda correspondiente, una dirección (dada por $\hat{\mathbf{p}}^P$ y $\hat{\mathbf{p}}^{SH,SV}$) y un factor de escala. Las ondas planas son vectores propios del operador de elasticidad.

El campo de desplazamiento complejo se puede escribir como:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} a_{\mathbf{p}}^P \mathbf{e}_{\mathbf{p}}^P(\mathbf{r}) e^{-i\omega_p t} d^3 p + \int_{\mathbb{R}^3} [a_{\mathbf{s}}^{SH} \mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{SH}(\mathbf{r}) + a_{\mathbf{s}}^{SV} \mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{SV}(\mathbf{r})] e^{-i\omega_s t} d^3 s \quad (3.3)$$

donde $\omega_p = \alpha_0 \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ y $\omega_s = \beta_0 \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$.

Para investigar el contenido de frecuencias en un tiempo t en la coda introducen la distribución de Wigner del campo de ondas:

$$E_S(t, \tau, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \rho_0 \beta_0^2 \langle \nabla \times \mathbf{u}(t + \tau/2, \mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{u}(t - \tau/2, \mathbf{r})^* \rangle \quad (3.4)$$

donde los brackets indican promedio de ensemble. Asumen que los coeficientes $a_{\mathbf{p}}$ y $a_{\mathbf{s}}$ son gobernados por un proceso de ruido blanco cuasi-estacionario:

$$\langle a_{\mathbf{s}}(t + \tau/2) a_{\mathbf{s}'}^*(t - \tau/2) \rangle = \sigma^2(t) \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \quad (3.5)$$

Aplicando las ecuaciones (3.3) y (3.5) sobre la ecuación (3.4) obtienen:

$$E_S(t, \tau, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \rho_0 \beta_0^2 \sigma^2(t) \sum_{m=SH,SV} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{s}}^m(\mathbf{r})|^2 e^{-i\omega_s \tau} d^3 s \quad (3.6)$$

La transformada de Fourier de la distribución de Wigner da la densidad espectral en la frecuencia ω_0 :

$$\begin{aligned} E_S(t, \omega_0, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_S(t, \tau, \mathbf{r}) e^{i\omega_0 \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \beta_0^2 \sigma^2(t) \sum_{m=SH,SV} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{s}}^m(\mathbf{r})|^2 \delta(\omega_0 - \omega_s) d^3 s \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por otra parte, a través de la ecuación (3.2) se puede ver que:

$$|\nabla \times \mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{SH}(\mathbf{r})|^2 = \frac{\omega_0^2}{\rho_0 \beta_0^2 (2\pi)^3} \quad (3.8)$$

Usando coordenadas esféricas para resolver la integral de la ecuación (3.7):

$$E_S(t, \omega_0) = \frac{2\sigma^2(t)\omega_0^4}{(2\pi)^2 \beta_0^3} \quad (3.9)$$

Es directo notar que para E_P se tendrá una expresión equivalente, salvo por un factor 2, ya que las ondas de cizalle tienen 2 polarizaciones posibles. Con esto:

$$E_P(t, \omega_0) = \frac{\sigma^2(t)\omega_0^4}{(2\pi)^2 \alpha_0^3} \quad (3.10)$$

Y la razón entre las ecuaciones (3.9) y (3.10) da por resultado la ecuación (3.1).

Capítulo 4

Propuesta de modelo de partición de energía usando una reología de daño

4.1. La densidad de energía elástica con parámetro de daño

En el trabajo de Lyakhovsky et al. (1997), ellos derivan relaciones esfuerzo-deformación para un medio sólido homogéneo y elástico con fracturas que no interactúan entre sí y que tienen una orientación preferencial. Esta orientación preferencial es perpendicular a la dirección de máxima tensión. Además tienen la propiedad de que pueden dilatarse o contraerse bajo el efecto de un esfuerzo. La suposición de que las fracturas en el sólido tienen orientaciones muy parecidas es apoyada por observaciones en laboratorio en distintos trabajos.

La solución que derivan es en función de los parámetros de Lamé de un sólido de Hooke λ y μ y además hay un tercer parámetro η , el cual describe el comportamiento no lineal del sólido y está relacionado con la densidad de las fracturas. Esta solución predice una reología elástica no lineal incluso para valores de deformación pequeños ($\varepsilon < 0.001$).

En trabajos anteriores a este, otros autores asumían que las fracturas eran estacionarias, con una apertura que no cambiaba durante la deformación. Al ser este el caso, se fuerza a que las relaciones esfuerzo-deformación en el medio con las fracturas sean lineales (O'Connell y Budiansky, 1974), lo cual se contradice con experimentos que muestran el comportamiento no lineal de las rocas.

Los autores sugieren que el comportamiento no lineal de las rocas es debido a que las fracturas tienen la característica de abrirse o cerrarse bajo algún esfuerzo. Ellos muestran

que esto se puede representar añadiendo un término de segundo orden en la energía elástica de un sólido de Hooke.

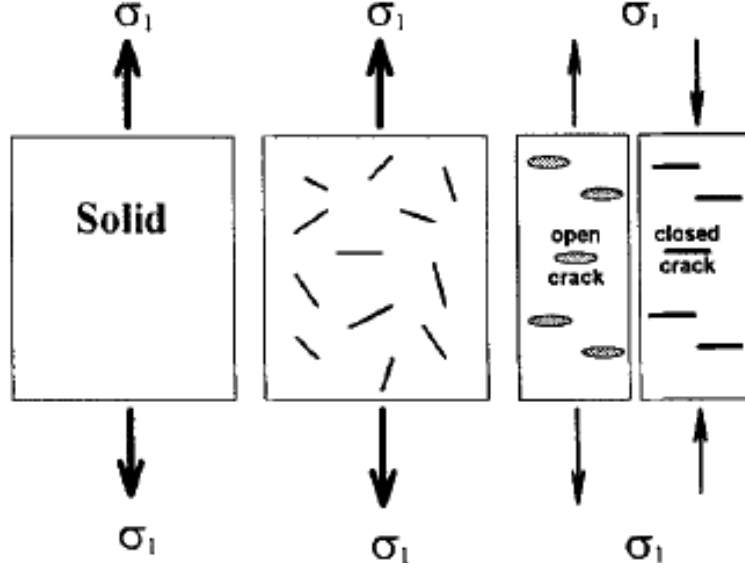


Figura 4.1: Tres modelos de sólido. De izquierda a derecha: Sólido elástico lineal (modelo Hookeano). Sólido elástico con fracturas en direcciones aleatorias. Sólido elástico usado por Lyakhovsky et al. con fracturas perpendiculares a la dirección de máxima tensión y que se abren o cierran dependiendo del esfuerzo aplicado.

La densidad de energía elástica de deformación generalizada obtenida de este modelo de daño es:

$$W(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2} I_1^2(\varepsilon) + \mu I_2(\varepsilon) - \eta I_1(\varepsilon) \sqrt{I_2(\varepsilon)} \quad (4.1)$$

Aquí, I_1 e I_2 son los dos primeros invariantes del tensor de deformación, con $I_1 = \varepsilon_{ii}$ e $I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$. Es posible notar que si no existe daño en el sólido, entonces (4.1) recupera la forma de la energía elástica del sólido de Hooke.

4.2. Efecto de la reología de daño en la ecuación elastodinámica

Es posible obtener el tensor de esfuerzo σ derivando la energía elástica en la ecuación (4.1) respecto al tensor de deformación ε_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda I_1 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \eta \sqrt{I_2} \delta_{ij} - \eta \frac{I_1}{\sqrt{I_2}} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}^H + \sigma_{ij}^{nl} \quad (4.2)$$

Es decir, el tensor de esfuerzo está dado por la suma del término de Hooke σ^H y un término extra no lineal σ^{nl} , donde

$$\sigma_{ij}^H = \lambda I_1 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad , \quad \sigma_{ij}^{nl} = -\eta \sqrt{I_2} \delta_{ij} - \eta \frac{I_1}{\sqrt{I_2}} \varepsilon_{ij} \quad (4.3)$$

De aquí, la ecuación elastodinámica para un medio homogéneo en presencia de una fuerza externa F_i es:

$$\rho \ddot{u}_i = \nabla_j \sigma_{ij} + F_i = (\lambda + 2\mu) [\nabla(\nabla \cdot u_i)]_i - \mu [\nabla \times \nabla \times u_i]_i + g_i(u) + F_i \quad (4.4)$$

Lo que diferencia la ecuación elastodinámica del caso hookeano es el término $g_i = \sigma_{ij,j}^{nl}$, que representa el efecto de la reología de daño y tiene la forma:

$$g_i(u) = -\eta \frac{\varepsilon_{kj} \varepsilon_{jk,i}}{\sqrt{I_2}} - \eta \frac{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kk,j}}{\sqrt{I_2}} - \eta \frac{\varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij,j}}{\sqrt{I_2}} + \eta \frac{\varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ml,j}}{I_2 \sqrt{I_2}} \quad (4.5)$$

4.3. Ecuación de movimiento de la onda scattereada usando el método de perturbaciones

El proceso físico asociado al scattering consiste en que, a medida que las ondas se propagan a través de un medio homogéneo donde la velocidad cambia de punto a punto dependiendo de la misma amplitud, el frente de onda es ligeramente deformado produciendo scattering. Cuando este efecto no es fuerte puede ser descrito a través del método de perturbaciones para scattering de ondas elásticas (Wu, 1989).

Se asumirá que el scattering producido en el medio de estudio es scattering débil, es decir, la distorsión de las ondas al interactuar con el medio es pequeña. De este modo, se considera el desplazamiento como:

$$u_i = u_i^{in} + u_i^{nl} \quad (4.6)$$

es decir, el desplazamiento total se describe como la suma del desplazamiento incidente u_i^{in} más el desplazamiento de la onda scattereada u_i^{nl} . Se cumple que $u_i^{nl} \ll u_i^{in}$.

Al primer orden, la ecuación de movimiento para la onda scattereada es:

$$\rho \ddot{u}_i^{nl} - (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot u_i^{nl} + \mu \nabla \times \nabla \times u_i^{nl} = g_i(u_i^{in}) \quad (4.7)$$

donde $g_i(u_i^{in})$ juega el rol de fuerza externa. La solución u^{nl} de esta ecuación está dada por la función de Green de la ecuación elastodinámica lineal y homogénea:

$$u^{nl} = \int G \cdot g_i(u_i^{in}) dV \quad (4.8)$$

En lo sucesivo se considerará que las ondas en estudio son ondas planas.

4.3.1. Onda plana incidente

Reemplazando los términos respectivos en la ecuación (4.5) la fuerza externa $g(u^{in})$ obtenida para ondas-P y ondas-S planas descritas por $u_i^{in} = a_i e^{i(\omega t - k_j x_j)}$ es (ver Apéndice):

$$g_i^p = -\eta u k_\alpha k_i = -\eta u k_\alpha^2 \hat{k}_i \quad (4.9)$$

$$g_i^s = -\frac{1}{\sqrt{2}} \eta u k_\beta k_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \eta u k_\beta^2 \hat{k}_i \quad (4.10)$$

pudiéndose señalar las siguientes propiedades:

- La fuerza externa es linealmente dependiente de la amplitud de la onda incidente.
- La intensidad de la fuerza (o equivalentemente el patrón de radiación) es isotrópica.

4.4. Partición de energía usando desplazamientos de ondas scattereadas por reología de daño

4.4.1. Funciones de Green para ondas-P y ondas-S

Teniendo las expresiones que definen la fuerza externa para una onda incidente plana, es posible obtener el desplazamiento asociado a esa fuerza usando la ecuación (4.8). Para esto, es necesario introducir las funciones de Green asociadas a la onda-P y a la onda-S. Estas son complejas para ondas elásticas, pero tienen una forma sencilla cuando se trabaja con distancias lejanas. El producto $g_j \cdot G_{ij}$ entregará la componente i -ésima del desplazamiento en un determinado punto del espacio para la fuerza g_j aplicada en el origen. Las funciones de Green son (Aki y Richards, 2002):

$$G_{ij}^p = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r} \hat{k}_i \hat{k}_j \quad (4.11)$$

$$G_{ij}^s = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r} (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \quad (4.12)$$

El tipo de scattering que se considerará para el desplazamiento total de las ondas scattereadas será el de ondas-P que tras la interacción con alguna fractura en el medio se transforman en ondas-S por scattering y viceversa.

4.4.2. Desplazamientos de la onda-P y onda-S scattereadas

Con la fuerza equivalente g_j^p asociada a la reología de daño, el desplazamiento de las ondas-P que se convierten a ondas-S por scattering en un cierto punto del espacio estará dado por el producto de esta fuerza por la función de Green de las ondas-S, es decir:

$${}^p u_i^s = g_j^p \cdot G_{ij}^s = -\frac{\eta u k_\alpha^2}{4\pi \rho \beta^2 r} (\delta_{ij} - \hat{k}_i' \hat{k}_j') \hat{k}_j = -\frac{\eta u k_\alpha^2}{4\pi \rho \beta^2 r} (\hat{k}_i - \hat{k}_i' \cos \theta) \quad (4.13)$$

Donde $\hat{k}_j' \hat{k}_j = \cos \theta$. Del mismo modo para las ondas-S que se convierten a ondas-P por scattering, este desplazamiento en un punto dado será el producto de la fuerza g_i^s por la función de Green de ondas-P:

$${}^s u_i^p = g_j^s \cdot G_{ij}^p = -\frac{\eta u k_\beta^2}{4\sqrt{2}\pi \rho \alpha^2 r} \hat{k}_i' \hat{k}_j' \hat{k}_j = -\frac{\eta u k_\beta^2}{4\sqrt{2}\pi \rho \alpha^2 r} \cos \theta \hat{k}_i' \quad (4.14)$$

4.4.3. Estabilización en el tiempo de la razón de energía de ondas scattereadas por daño

El problema de la partición de energía se puede entender como un escenario en que se tiene dos cantidades de distintas energía iniciales y en el transcurso del tiempo se reparten o intercambian entre sí, de modo que tras un largo lapso de tiempo, la razón entre esas dos cantidades se estabiliza. Esto se puede entender de la siguiente manera: Imagínese que se tiene una cantidad x de energía compresional y una cantidad y de energía de cizalle. El cambio en el tiempo de la energía compresional estará dado por dos términos: la cantidad que pierde al transferir esta misma a la energía y y la cantidad que gana y que le fue transferida desde la energía y (en este caso a través de scattering gobernado por una reología de daño). El sistema de ecuaciones diferenciales que describirá esto es:

$$\dot{x}(t) = -\varphi x + \psi y \quad (4.15)$$

$$\dot{y}(t) = \varphi x - \psi y = -\dot{x}(t) \quad (4.16)$$

Aquí, φ es el coeficiente que expresa la cantidad de energía que x pierde y que a su vez es transferida a y , y ψ es el coeficiente que expresa la cantidad de energía que y pierde y que gana x . Se debe mencionar que tanto φ como ψ son independientes del tiempo y solo dependen de la fuente de la energía, en este caso es la fuente asociada a la propagación de ondas scattereadas por una reología de daño. Por conservación de la energía, la cantidad inicial de energía total debería ser la misma, cosa que se cumple bajo este supuesto según muestran las ecuaciones anteriores.

La solución al sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$x(t) = -\frac{\dot{x}(0)}{\varphi + \psi} e^{-(\varphi + \psi)t} + x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{\varphi + \psi} \quad (4.17)$$

$$y(t) = -\frac{\dot{y}(0)}{\varphi + \psi} e^{-(\varphi + \psi)t} + y(0) + \frac{\dot{y}(0)}{\varphi + \psi} \quad (4.18)$$

Conociendo las soluciones x e y se puede ver qué es lo que pasa en el límite en que el tiempo tiene al infinito y se observa que la razón y/x se estabiliza a un valor constante:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\varphi y(0) + \psi y(0) + \varphi x(0) - \psi y(0)}{\varphi x(0) + \psi x(0) - \varphi x(0) + \psi y(0)} = \frac{\varphi}{\psi} \quad (4.19)$$

Como se puede observar, para dos energías que se comportan en el tiempo de la forma antes mencionada (en este caso el interés está en la razón entre energía de cizalle y compresional), la razón tras un largo lapso de tiempo se estabiliza y no dependerá de las fuentes de energía, sino de la forma en que las energías se transforman de un tipo a otro. En este caso, φ representa la forma en que la energía de las ondas-P planas se transforman a ondas-S por scattering y ψ representa la forma en que la energía de las ondas-S planas se transforman a ondas-P por scattering.

4.4.4. Expresión de la partición de energía

Las energías compresional y de cizalle para las ondas planas scattereadas por daño serán:

$$\epsilon^p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 ({}^s u^p)^2 \quad (4.20)$$

$$\epsilon^s = \frac{1}{2} \rho \omega^2 ({}^p u^s)^2 \quad (4.21)$$

Es decir:

$$\frac{\epsilon^s}{\epsilon^p} = \frac{({}^p u^s)^2}{({}^s u^p)^2} \quad (4.22)$$

Por lo cual es necesario calcular para este caso los términos $(^s u^p)^2$ y $(^p u^s)^2$. Estos son:

$$(^s u^p)^2 = \int |^s u_i^p|^2 d\Omega = 2\pi \frac{\eta^2 u^2 k_\beta^4}{2(4\pi)^2 \rho^2 \alpha^4 r^2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (4.23)$$

$$(^s u^p)^2 = \frac{\eta^2 u^2 k_\beta^4}{24\pi \rho^2 \alpha^4 r^2} \quad (4.24)$$

De la misma forma para $(^p u^s)^2$:

$$(^p u^s)^2 = \int |^p u_i^s|^2 d\Omega = 2\pi \frac{\eta^2 u^2 k_\alpha^4}{(4\pi)^2 \rho^2 \beta^4 r^2} \int_0^\pi (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.25)$$

$$(^p u^s)^2 = \frac{\eta^2 u^2 k_\alpha^4}{3\pi \rho^2 \beta^4 r^2} \quad (4.26)$$

Considerando $k_\alpha = \omega/\alpha$ y $k_\beta = \omega/\beta$, la partición de energía para ondas planas scattereadas debido a una reología de daño está dada por:

$$R_{dam} = \frac{(^p u^s)^2}{(^s u^p)^2} = \frac{\eta^2 u^2 k_\alpha^4}{3\pi \rho^2 \beta^4 r^2} \cdot \frac{24\pi \rho^2 \alpha^4 r^2}{\eta^2 u^2 k_\beta^4} \quad (4.27)$$

$$R_{dam} = 8 \quad (4.28)$$

Parte II

Modelo numérico de partición de
energía y efecto de la superficie libre

Capítulo 5

Modelación numérica de la partición de energía usada por otros autores

5.1. Aproximación numérica de la energía observada en superficie usando diferencias finitas

El objetivo de esta sección es introducir la matemática detrás del uso de un array de estaciones para aproximar energías a través del método de diferencias finitas.

La densidad de energía de onda elástica total está dada por (Morse y Feshback, 1953):

$$W = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \alpha^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{1}{2} \rho \beta^2 (|\nabla \times \mathbf{u}|)^2 + I \quad (5.1)$$

Donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es el vector de desplazamiento y ρ la densidad de masa. Los parámetros de Lamé se consideran constantes en la corteza. Los términos en (5.1) representan respectivamente la densidad de energía cinética, la densidad de energía dilatacional/compresional, la densidad de energía de cizalle y el último es un término de interferencia y es cero excepto cerca de los bordes.

Para modelar numéricamente la partición de energía de ondas P y S entonces, se usará los términos de la ecuación (5.1):

$$W^P = \frac{1}{2} \rho \alpha^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \quad , \quad W^S = \frac{1}{2} \rho \beta^2 (|\nabla \times \mathbf{u}|)^2 \quad (5.2)$$

Usando la condición de borde de superficie libre de tracciones (Shapiro et al., 2000):

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 = 4 \frac{\beta^4}{\alpha^4} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \quad (5.3)$$

$$(|\nabla \times \mathbf{u}|)^2 = 4 \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \quad (5.4)$$

De aquí es posible apreciar que el problema de la modelación numérica a través de diferencias finitas se reduce a encontrar seis incógnitas a partir de las estaciones: $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ y $\frac{\partial u_x}{\partial y}$.

En general, considerando el sistema de coordenadas norte-este-vertical, no se tendrá esta disposición espacial de las estaciones, ya que pueden estar distribuidas de cualquier forma, por lo que hay que definir un nuevo sistema utilizando un par de estaciones cualquiera, tal que al aplicar una rotación al mismo se pueda volver al sistema original. Este nuevo sistema estará definido por un eje radial r , tal que las dos estaciones pasarán por ese eje y un eje transversal t , que es perpendicular al radial (ver Figura 5.1).

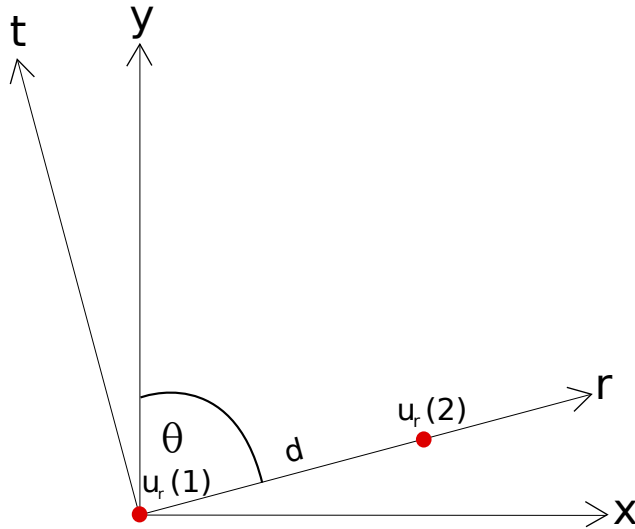


Figura 5.1: Rotación de los ejes coordenados horizontales en un ángulo θ .

De este modo, es posible escribir las componentes del vector en el sistema rt $\mathbf{u}'$, u_r y u_t en función de las componentes del vector en el sistema norte-este $\mathbf{u}$, u_x y u_y y viceversa:

$$\begin{aligned} u_r &= u_y \cos \theta + u_x \sin \theta \\ u_t &= -u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ u_x &= u_r \sin \theta - u_t \cos \theta \\ u_y &= u_r \cos \theta + u_t \sin \theta \end{aligned} \quad (5.5)$$

Eligiendo dos estaciones que estén a una distancia d entre sí y que el eje r que las une forme un ángulo θ respecto al eje y (norte), es posible encontrar las expresiones, a través de las ecuaciones en (5.5) para las derivadas parciales de las tres componentes de $\mathbf{u}'$ respecto a r .

En el caso de $\frac{\partial u_r}{\partial r}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(u_x \sin \theta + u_y \cos \theta) = \sin \theta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \sin \theta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cos \theta \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \sin^2 \theta + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \cos \theta \sin \theta\end{aligned}\quad (5.6)$$

Para $\frac{\partial u_t}{\partial r}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_t}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(-u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) = -\cos \theta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= -\cos \theta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cos \theta \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial u_t}{\partial r} &= \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial u_y}{\partial x} \sin^2 \theta - \frac{\partial u_x}{\partial y} \cos^2 \theta\end{aligned}\quad (5.7)$$

Y finalmente para $\frac{\partial u_v}{\partial r}$ ($u_v = u_z$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_v}{\partial r} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial u_v}{\partial r} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cos \theta\end{aligned}\quad (5.8)$$

Por otra parte, para un par de estaciones tal que una estación está ubicada en r_1 y la otra en r_2 :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{u_r(r_2) - u_r(r_1)}{d} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial r} = \frac{u_t(r_2) - u_t(r_1)}{d} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u_v}{\partial r} = \frac{u_v(r_2) - u_v(r_1)}{d} \quad (5.11)$$

Utilizando un par de estaciones y las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) lo que se obtiene es un sistema de tres ecuaciones y seis incógnitas, con dos de las tres ecuaciones acopladas y el cual no tiene solución. Sin embargo, al añadir otro par de estaciones distinto, se obtienen otras tres ecuaciones que dependen de las mismas seis incógnitas y lo que cambia es solamente

el ángulo entre este segundo sistema respecto al sistema original norte-este, ángulo que es conocido y con lo cual se obtiene una solución única para las 6 incógnitas. Del mismo modo, si se añaden más estaciones se tendrá más ecuaciones para resolver el sistema, con lo que quedaría sobredeterminado, pudiéndose encontrar la solución del sistema en el sentido de los mínimos cuadrados.

Sea el sistema dado por las coordenadas horizontales $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, que coinciden con el sistema norte-este; el sistema de coordenadas horizontales $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, que se obtiene al aplicar una rotación $\theta_{xx'}$ al sistema norte-este; y el sistema de coordenadas horizontales $\mathbf{x}''$, $\mathbf{y}''$, que se obtiene al aplicar una rotación $\theta_{xx''}$ al sistema norte-este (los tres sistemas comparten el mismo eje vertical $\mathbf{z}$). Usando tres estaciones, se obtiene el sistema dado por las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) para dos pares de ecuaciones en forma matricial, considerando la matriz de incógnitas:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Para esta matriz de incógnitas la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_{xx'} & \cos^2 \theta_{xx'} & \sin \theta_{xx'} \cos \theta_{xx'} & \sin \theta_{xx'} \cos \theta_{xx'} & 0 & 0 \\ -\sin \theta_{xx'} \cos \theta_{xx'} & \sin \theta_{xx'} \cos \theta_{xx'} & -\cos^2 \theta_{xx'} & \sin^2 \theta_{xx'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_{xx'} & \cos \theta_{xx'} \\ \sin^2 \theta_{xx''} & \cos^2 \theta_{xx''} & \sin \theta_{xx''} \cos \theta_{xx''} & \sin \theta_{xx''} \cos \theta_{xx''} & 0 & 0 \\ -\sin \theta_{xx''} \cos \theta_{xx''} & \sin \theta_{xx''} \cos \theta_{xx''} & -\cos^2 \theta_{xx''} & \sin^2 \theta_{xx''} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_{xx''} & \cos \theta_{xx''} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Y el producto matricial $A \cdot x$ dará por resultado la matriz:

$$b = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r}(e_1 e_2) \\ \frac{\partial u_t}{\partial r}(e_1 e_2) \\ \frac{\partial u_v}{\partial r}(e_1 e_2) \\ \frac{\partial u_r}{\partial r}(e_1 e_3) \\ \frac{\partial u_t}{\partial r}(e_1 e_3) \\ \frac{\partial u_v}{\partial r}(e_1 e_3) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$e_1 e_2$ es el par formado por la primera estación y la segunda y $e_1 e_3$ es el par formado por la primera estación y la tercera, a su vez, las componentes de b se obtienen usando las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11), es decir, a partir de los datos.

Se tendrá entonces para el caso de tres estaciones (dos combinaciones distintas entre ellas) que la solución para la matriz de incógnitas será:

$$x = A^{-1}b \quad (5.15)$$

Como se mencionó anteriormente, en caso de usar más de dos combinaciones distintas entre estaciones (tres estaciones o más) es posible obtener la solución del sistema usando la matriz transpuesta de coeficientes, pero la solución será en el sentido de los mínimos cuadrados. Esta será:

$$A^T A x = A^T b \Rightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (5.16)$$

Habiendo encontrado las seis incógnitas en el sentido de los mínimos cuadrados, es posible introducir estas mismas en las ecuaciones (5.3) y (5.4) para luego reemplazar en (5.2), para obtener W_S/W_P , que será la razón de energía de ondas-S a ondas-P en la superficie libre.

5.2. Arrays en el norte de Chile y eventos usados para modelar numéricamente la partición de energía en la coda a través de diferencias finitas

5.2.1. Arrays de la red IPOC en el norte de Chile

Las estaciones de las cuales se extrae los datos de los eventos sísmicos que se utilizarán para probar el programa que calcula la partición de energía pertenecen a la red IPOC (Integrated

Plate boundary Observatory Chile).

Más específicamente, el set de estaciones usado es el perteneciente al proyecto MINAS - IPOC Miny Arrays, el cual consiste en tres arrays temporales (dos años) de pequeña apertura (S1, S2 y S3). Los tres arrays tienen sus estaciones distribuidas de modo que forman un triángulo, con estaciones de periodo corto (Mark L4-3D) en el centro y estaciones de banda ancha (Trillium Compact), en los vértices del triángulo que forman, tal como se observa a continuación:

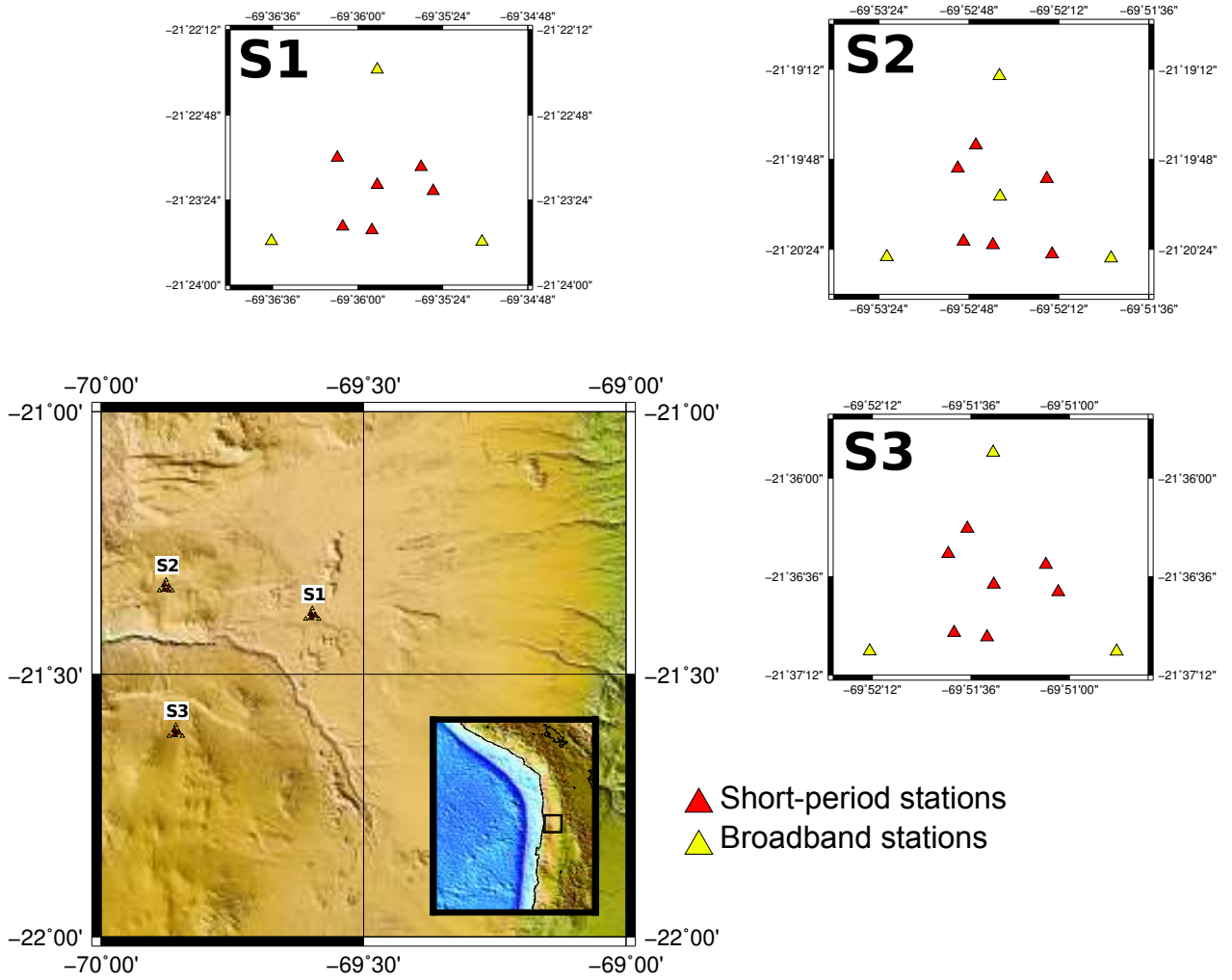


Figura 5.2: Mapa de arrays de estaciones del norte de Chile que entregan la información de los eventos usados.

Las estaciones entregan los datos de desplazamiento en unidades de cuentas, por lo que solamente se utiliza la información de desplazamiento entregado por las estaciones de periodo corto a fin de no tener problemas con la distinta forma en que responden los instrumentos.

5.2.2. Algo sobre los eventos usados

Se posee la información de un día entero a partir de los datos de los tres arrays de la red IPOC. Este día es el 21 de octubre de 2011. Adicionalmente se puede decir que los datos tienen una razón de muestreo de 200 muestras por segundo.

La Figura 5.3 muestra el aspecto del día entero visto en los datos:

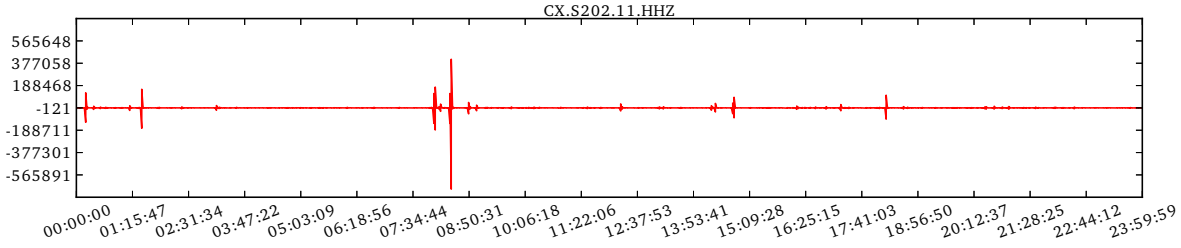


Figura 5.3: Sismicidad del día 21 de octubre de 2011 visto en la estación S202, componente Z, de la red IPOC.

Las amplitudes observadas son relativas, es decir, lo que a simple vista es posible observar son aquellos eventos de mayor amplitud en comparación con el resto de los eventos. Pero actualmente la actividad sísmica en el norte de Chile es muy intensa, así que mirando más de cerca son varias decenas de eventos los que se pueden encontrar. De este modo, lo que se hace es escoger varios eventos de distinto aspecto: algunos más intensos, otros con alguna fase más notoria, otros más pequeños.

Adicionalmente, como se puede apreciar a continuación, en este día se registra un telesismo, el cual también se usará y que ocurrió en Japón:

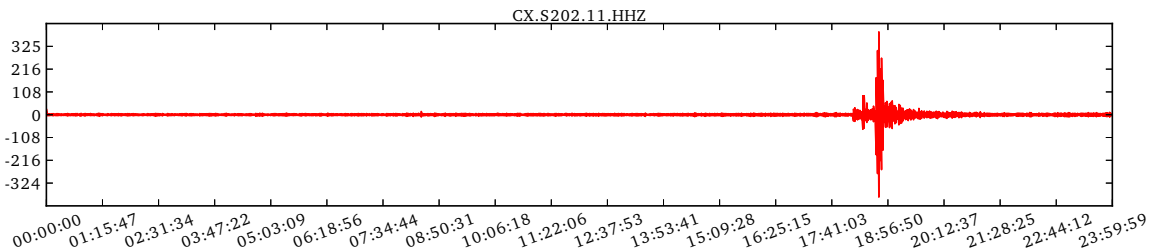


Figura 5.4: Telesismicidad del día 21 de octubre de 2011 visto en la estación S202, componente Z, de la red IPOC. El filtro pasa-banda usado es entre 0.01 y 0.1 Hz.

5.3. El algoritmo en Python que calcula la partición de energía a través de diferencias finitas

Tras conocer la matemática necesaria para modelar la partición de energía a través de diferencias finitas y conocer cuál será el array (o los arrays) de estaciones a usar y los eventos sísmicos, se dispone de todo lo necesario para la programación.

El algoritmo escrito en Python determina la partición de energía en superficie de un evento sísmico a través de los siguientes pasos:

1. Tras importar todos los módulos necesarios para escribir el código, se puede elegir un evento entre un conjunto de eventos y el array ($S1$, $S2$ o $S3$) que se usará para estimar las energías.
2. Se hace un filtrado de tipo pasa-banda de las señales leídas, para lo cual se debe especificar las frecuencias de corte y posteriormente se usa el teorema de Nyquist para reducir la frecuencia de muestreo, de modo que las operaciones matriciales demoren menos. Para ambos pasos se debe importar módulos de ObsPy.
3. Se normalizan las señales en función de la amplitud mayor (en valor absoluto) de cada una.
4. Se calcula la distancia entre cada par de estaciones y el rumbo.
5. Se obtiene las derivadas en función de los datos.
6. Con los rumbos se puede obtener la matriz de coeficientes.
7. Con las derivadas a partir de los datos y la matriz de coeficientes se obtiene la matriz de incógnitas, solución del sistema en el sentido de los mínimos cuadrados.
8. Se obtiene las densidades de energía de onda-P y de onda-S y la razón de energía en cada instante de tiempo.
9. Para efectos visuales (gráficos), se aplica un suavizamiento a las energías resultantes y a la razón de energía, de modo de disminuir los peaks.

Capítulo 6

Efecto de la superficie libre en la aproximación de la energía de ondas P y S

6.1. La energía incidente en función de la energía observada en superficie

En el capítulo anterior se obtuvo la energía gracias a observaciones obtenidas de sismómetros en la superficie libre. Esto quiere decir que las energías de ondas-P y ondas-S y la razón de energía serán en realidad aquellas en la superficie.

Si la coda es considerada como un conjunto de llegadas de ondas que en su camino desde la fuente hasta la estación interactuaron con pequeñas heterogeneidades o no-linealidades en el medio, y considerando que el carácter difusivo de la coda hará que en tales llegadas se observe la estabilización de la partición de energía de ondas-S a ondas-P, entonces lo realmente necesario para observar la estabilización de la partición de energía en la coda es la energía incidente, que es lo que se ha estado propagando por el interior de la Tierra, ya que la energía en superficie, obtenida anteriormente, contiene también las contribuciones de la energía de ondas reflejadas en la superficie libre.

Conociéndose la energía en superficie, es posible calcular la expresión exacta de la energía incidente en función de esta y del ángulo de incidencia de ondas-P u ondas-S. Esto es lo que hará en la presente sección.

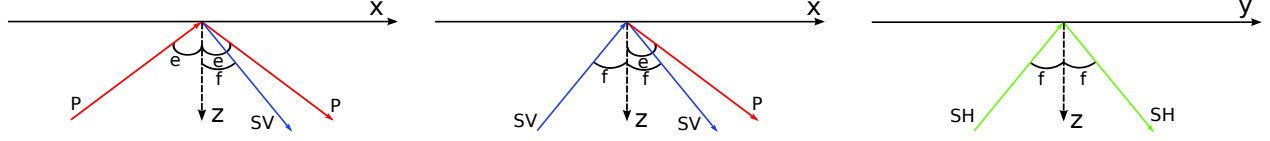


Figura 6.1: Ondas sísmicas propagándose por un medio sólido e interactuando con la superficie libre. De izquierda a derecha: Onda-P incidente y sus ondas reflejadas P y SV; onda-SV incidente y sus ondas reflejadas SV y P; onda-SH y su onda reflejada SH.

Como se puede apreciar en la Figura 6.1, si una sola onda-P incide en la superficie libre, se reflejará en ella, produciendo una onda-P reflejada y una onda-SV. En el caso de una sola onda-SV incidente, se producirá una onda-SV reflejada y una onda-P. Finalmente, para una onda-SH incidente, se reflejará una onda-SH. En cada caso, el desplazamiento total en un tiempo t y en cualquier punto del espacio estará dado por la suma de la onda incidente y sus respectivas ondas reflejadas.

6.1.1. Onda-P incidente

Para una fuente distante, las ondas sísmicas radiadas llegan a superficie aproximadamente como ondas planas. En este caso, la onda está contenida en el plano $\hat{x}\hat{z}$ y el desplazamiento total está dado por (Ben-Menahem y Singh, 1981):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, z, t) = & u_p(\hat{x} \sin(e) - \hat{z} \cos(e))e^{i\omega\left(t - \frac{x \sin(e) - z \cos(e)}{\alpha}\right)} \\ & + u_{pp}(\hat{x} \sin(e) + \hat{z} \cos(e))e^{i\omega\left(t - \frac{x \sin(e) + z \cos(e)}{\alpha}\right)} \\ & + u_{ps}(-\hat{x} \cos(f) + \hat{z} \sin(f))e^{i\omega\left(t - \frac{x \sin(f) + z \cos(f)}{\beta}\right)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde e y f son los ángulos respecto a la vertical de la onda-P incidente y la onda-S reflejada, respectivamente. u_p , u_{pp} y u_{ps} son las amplitudes de la onda-P incidente, la onda-P reflejada y la onda-S reflejada, respectivamente.

Las condiciones de borde de superficie libre de tracciones son:

$$\begin{aligned} T_{zz}|_{z=0} &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ T_{xz}|_{z=0} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Es decir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial z} &= - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= - \frac{\partial u_z}{\partial x}\end{aligned}\quad (6.3)$$

Esta condición debe ser satisfecha en $z = 0$ para todos los valores de x y t , para lo cual:

$$\frac{\sin(e)}{\alpha} = \frac{\sin(f)}{\beta} \quad (6.4)$$

De estas consideraciones se obtiene la razón entre las amplitudes de onda-P incidente con la P reflejada y la SV reflejada:

$$\begin{aligned}\frac{u_{pp}}{u_p} &= \frac{\sin(2e)\sin(2f) - (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)}{\sin(2e)\sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} \\ \frac{u_{ps}}{u_p} &= \frac{-2(\alpha/\beta)\sin(2e)\cos(2f)}{\sin(2e)\sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)}\end{aligned}\quad (6.5)$$

Con estas dos relaciones, el desplazamiento en superficie es:

$$\mathbf{u}(x, t)|_{z=0} = u_p(\hat{x}\sin(2f) - \hat{z}\cos(2f)) \frac{2(\alpha/\beta)^2 \cos(e)}{\sin(2e)\sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin(e)}{\alpha}\right)} \quad (6.6)$$

Energía compresional: La energía compresional en superficie está dada por:

$$\begin{aligned}\epsilon^p &= \frac{1}{2}\rho\alpha^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho\alpha^2 \left(\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 = 2\rho\alpha^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \\ &= 2\rho\omega^2 u_p^2 \left(\frac{\sin(2e)\sin(2f)}{\sin(2e)\sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} \right)^2\end{aligned}\quad (6.7)$$

Esta es proporcional al cuadrado de la suma de las amplitudes de la onda incidente más las reflejadas.

La energía compresional de la onda-P incidente es: $\epsilon_{inc}^p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_p^2$, por lo que la energía compresional en superficie está dada por:

$$\epsilon^p = \epsilon_{inc}^p F^2(e) \quad (6.8)$$

Es decir, la energía compresional en superficie es función de la energía compresional incidente por una función del ángulo respecto a la vertical de la onda-P incidente:

$$F(e) = \frac{2\sin(2e)\sin(2f)}{\sin(2e)\sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} = \left(1 + \frac{u_{pp}}{u_p} \right) \quad (6.9)$$

Resulta interesante notar que para una onda-P que incide verticalmente ($e = 0$), la energía compresional en superficie sería cero, aun cuando la energía compresional incidente es distinta de cero.

Energía de cizalle: La energía de cizalle en superficie es:

$$\begin{aligned}
\epsilon^s &= \frac{\mu}{2} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 = \frac{\mu}{2} \left| \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|^2 = 2\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \\
&= 2\rho\omega^2 u_p^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(2e) \cos(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} \right)^2 \\
&= \epsilon_{inc}^p \left(\frac{2(\alpha/\beta) \sin(2e) \cos(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} \right)^2
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Similarmente:

$$\epsilon^s = \epsilon_{inc}^p G^2(e) \tag{6.11}$$

donde:

$$G(e) = \frac{2(\alpha/\beta) \sin(2e) \cos(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} = -\frac{u_{ps}}{u_p} \tag{6.12}$$

De este modo, en el caso de una onda-P incidente (y ninguna onda-S), la partición de energía en superficie es:

$$\frac{\epsilon^s}{\epsilon^p} = \frac{G^2(e)}{F^2(e)} = \frac{\alpha^2 \cos^2(2f)}{\beta^2 \sin^2(2f)} = \left(\frac{u_{ps}}{u_{pp} + u_p} \right)^2 \tag{6.13}$$

lo cual no corresponde a la partición de energía de las ondas incidentes.

6.1.2. Onda-SV incidente

La onda-SV también está contenida en el plano $\hat{x}\hat{z}$. En este caso el desplazamiento en un punto cualquiera está dado por la suma del desplazamiento de la onda-SV incidente, la onda-SV reflejada y la onda-P reflejada y está dado por (Ben-Menahem y Singh, 1981):

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, z, t) &= [u_s(\hat{x} \cos(f) + \hat{z} \sin(f))e^{i\omega z \cos(f)/\beta} + u_{sp}(\hat{x} \sin(e) + \hat{z} \cos(e))e^{-i\omega z \cos(e)/\alpha} \\
&\quad + u_{ss}(-\hat{x} \cos(f) + \hat{z} \sin(f))e^{-i\omega z \cos(f)/\beta}]e^{i\omega(t-x \sin(f)/\beta)}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

donde f y e son los ángulos respecto a la vertical de las ondas S incidente y P reflejada, respectivamente. u_s , u_{ss} y u_{sp} son las amplitudes de la onda-SV incidente, onda-SV reflejada y onda-P reflejada, respectivamente. Del mismo modo que antes, al aplicar las condiciones

de superficie libre de tracciones, la relación entre las ondas reflejadas y la onda incidente en este caso son:

$$\begin{aligned}\frac{u_{sp}}{u_s} &= \frac{(\alpha/\beta) \sin(4f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} \\ \frac{u_{ss}}{u_s} &= \frac{\sin(2e) \sin(2f) - (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)}\end{aligned}\quad (6.15)$$

Energía compresional: En este caso, usando las condiciones dadas por las ecuaciones (6.2) y (6.4) la energía compresional en superficie es:

$$\epsilon^p = \frac{1}{2} \rho \alpha^2 |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_{sp}^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_s^2 \left(\frac{(\alpha/\beta) \sin(4f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} \right)^2 \quad (6.16)$$

Se puede ver que esto corresponde a la energía compresional de la onda-P reflejada. Además:

$$\epsilon^p = \epsilon_{inc}^s H^2(f) \quad (6.17)$$

donde:

$$H(f) = \frac{(\alpha/\beta) \sin(4f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} = \frac{u_{sp}}{u_s} \quad (6.18)$$

Energía de cizalle: La energía de cizalle en superficie es:

$$\epsilon^s = \frac{\mu}{2} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 = \frac{\mu}{2} \left| \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|^2 = 2\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_s^2 \left(1 + \frac{u_{ss}}{u_s} \right)^2 \quad (6.19)$$

Del mismo modo que antes:

$$\epsilon^s = \epsilon_{inc}^s I^2(f) \quad (6.20)$$

donde:

$$I(f) = \frac{2 \sin(2e) \sin(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} = \left(1 + \frac{u_{ss}}{u_s} \right) \quad (6.21)$$

que es proporcional al cuadrado de la suma de las amplitudes de la onda-S directa y la reflejada.

Entonces, en el caso de una onda-S incidente, sin una onda-P, la partición de energía en superficie es:

$$\frac{\epsilon^s}{\epsilon^p} = \frac{I^2(f)}{H^2(f)} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\sin^2(2e)}{\cos^2(2f)} = \left(\frac{u_s + u_{ss}}{u_{sp}} \right)^2 \quad (6.22)$$

6.1.3. Onda-SH incidente

En este caso el desplazamiento en un punto cualquiera será la suma del desplazamiento de la onda-SH incidente y la onda-SH reflejada y está dado por (Ben-Menahem y Singh, 1981):

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \hat{y} \left[u_{sh} e^{i\omega \left(t - \frac{x \sin(f) - z \cos(f)}{\beta} \right)} + u_{shsh} e^{i\omega \left(t - \frac{x \sin(f) + z \cos(f)}{\beta} \right)} \right] \quad (6.23)$$

esto notando que debe cumplirse que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Energía de cizalle y compresional: Nótese que en el caso de ondas-SH todas las ondas incidentes son reflejadas, es decir, en superficie, por lo cual, no hay energía compresional:

$$\epsilon^p = 0 \quad (6.24)$$

De las condiciones de borde (físicamente, la continuidad del momento en la superficie libre y la amplitud de onda incidente es igual a amplitud de onda reflejada) se puede obtener al igual que antes la expresión que relaciona la energía incidente con la energía medida en superficie para la onda-SH incidente. La energía de cizalle en superficie es:

$$\epsilon^s = \frac{1}{2} \rho \beta^2 |\nabla \times \mathbf{u}|^2 = 2 \rho u^2 \omega^2 \sin^2(f) = \epsilon_{inc}^s J^2(f) \quad (6.25)$$

donde:

$$J(f) = 2 \sin^2(f) \quad (6.26)$$

6.1.4. Ondas P+SV+SH incidentes

Dado lo anterior, es posible obtener la energía compresional y de cizalle para la superposición de ondas P, SV y SH. Estas expresiones serán:

$$\begin{aligned} \epsilon^p(u_p, u_{sv}; e, f) &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 (u_p F(e) + u_{sv} H(e))^2 \\ \epsilon^s(u_p, u_{sv}, u_{sh}; e, f) &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 (u_p G(f) + u_{sv} I(f) + u_{sh} J(f))^2 \end{aligned} \quad (6.27)$$

donde nuevamente, e y f son el ángulo de incidencia de la onda-P y el ángulo de incidencia de las ondas-S, respectivamente. u_p , u_{ps} y u_{sh} son la amplitud de las ondas P, SV y SH, respectivamente.

En el caso de la coda, en que llegan ondas de todas las direcciones, las energías compresional y de cizalle deberían ser la contribución de todas las direcciones posibles, es decir:

$$W^p(u_p, u_{sv}) = \int \epsilon^p(u_p, u_{sv}; e, f) d\Omega \quad (6.28)$$

$$W^s(u_p, u_{sv}, u_{sh}) = \int \epsilon^s(u_p, u_{sv}, u_{sh}; e, f) d\Omega \quad (6.29)$$

Si para la equipartición uno asume que las ondas SV y SH tienen la misma energía, se obtienen finalmente dos ecuaciones, para W^p y W^s , con dos incógnitas, que son la amplitud de las ondas P y S. De este modo, es posible obtener de forma única u_p y u_{sv} a partir de valores observados de W^p y W^s .

En este trabajo se define la partición de energía $\bar{R}$ como la razón de la energía de onda-S incidente a la energía de onda-P incidente como:

$$\bar{R} = \frac{\epsilon_{inc}^s}{\epsilon_{inc}^p} = \frac{u_s^2}{u_p^2} \quad (6.30)$$

Para ondas propagándose en todas direcciones con amplitudes similares, se tiene que (ver apéndice):

$$\bar{R} = \left(\frac{A\sqrt{W^s} - C\sqrt{W^p}}{(D+E)\sqrt{W^p} - B\sqrt{W^s}} \right)^2 = \left(\frac{A\sqrt{R} - C}{(D+E) - B\sqrt{R}} \right)^2 \quad (6.31)$$

Las constantes A , B , C , D y E se pueden obtener por integración numérica (ver Apéndice) y para el caso de un sólido de Poisson son:

$$A = 4.62 \quad , \quad B = 3.12 \quad , \quad C = 5.15 \quad (6.32)$$

$$D = 8.54 \quad , \quad E = 9.85$$

con lo cual la ecuación (6.31) tiene la forma:

$$\bar{R} = \left(\frac{4.62\sqrt{R} - 5.15}{18.39 - 3.12\sqrt{R}} \right)^2 \quad (6.33)$$

donde R es la partición de energía en superficie. De aquí entonces, se ve que en función de la partición de energía medida en superficie R , es posible expresar la partición de energía incidente $\bar{R}$.

Parte III

Resultados, discusión y conclusiones

Capítulo 7

Resultados

7.1. Resultados: Modelo de partición de energía usando reología de daño

7.1.1. Estabilización de la razón de energía de ondas scattereadas por daño tras un largo lapso de tiempo

Autores encontraron la forma en que la razón de energía de cizalle a compresional se estabiliza tras un lapso de tiempo, lo cual se puede ver en datos reales como valores de razón de energía que fluctúan muy poco en torno a una constante en la llegada de las ondas de coda después de la llegada de las fases principales. Este razonamiento se desarrolló para ondas elásticas propagándose por un medio heterogéneo, definiéndose este último como un campo en que el scattering de ondas es producto interacciones con fluctuaciones de la densidad y la compresibilidad del medio (Ryzhik et al., 1996).

Sabiendo a priori que una reología distinta a la lineal también produce scattering, se esperaba que para ondas scattereadas por reología de daño también se pudiese encontrar que las energías de cizalle y compresional se particionan, estabilizándose en el tiempo.

Para representar una onda scattereada debido a una reología de daño se utilizó una generalización de la energía elástica, tal como proponen Lyakhovsky et al. (1997), a partir de la cual se puede obtener con ayuda del método de las perturbaciones (Wu, 1985) la expresión que tendría una fuerza externa que representa el efecto del daño, todo esto para el caso particular de ondas-P y ondas-S planas.

Se obtuvo el desplazamiento de ondas-P que son scattereadas por daño como ondas-S y viceversa. Se consideró que ambas energías varían en el tiempo traspasando una parte a la otra y también recibiendo de la otra, de modo que la energía total se mantiene igual en todo instante. Para este caso había que demostrar que tras un largo lapso de tiempo (matemáticamente esto es el límite en el infinito) la razón entre las energías tendía a estabilizarse a una constante del tiempo y se encontró que no depende de la fuente, sino de la forma en que dos tipos de energías se reparten la energía total entre ellas.

La estabilización en la coda compuesta por ondas scattereadas por daño para ondas planas incidentes resultó ser:

$$R_{dam} = 8 \quad (7.1)$$

versus la expresión

$$R = \frac{\alpha^3}{\beta^3} \approx 10.39 \quad (7.2)$$

que se obtiene para ondas scattereadas por interacción con las heterogeneidades del medio por el que se propagan y que tiene un valor aproximado de 10.39 para un sólido de Poisson.

7.2. Resultados: Modelo numérico de partición de energía y efecto de la superficie libre

7.2.1. El modelo numérico de partición de energía a través de diferencias finitas

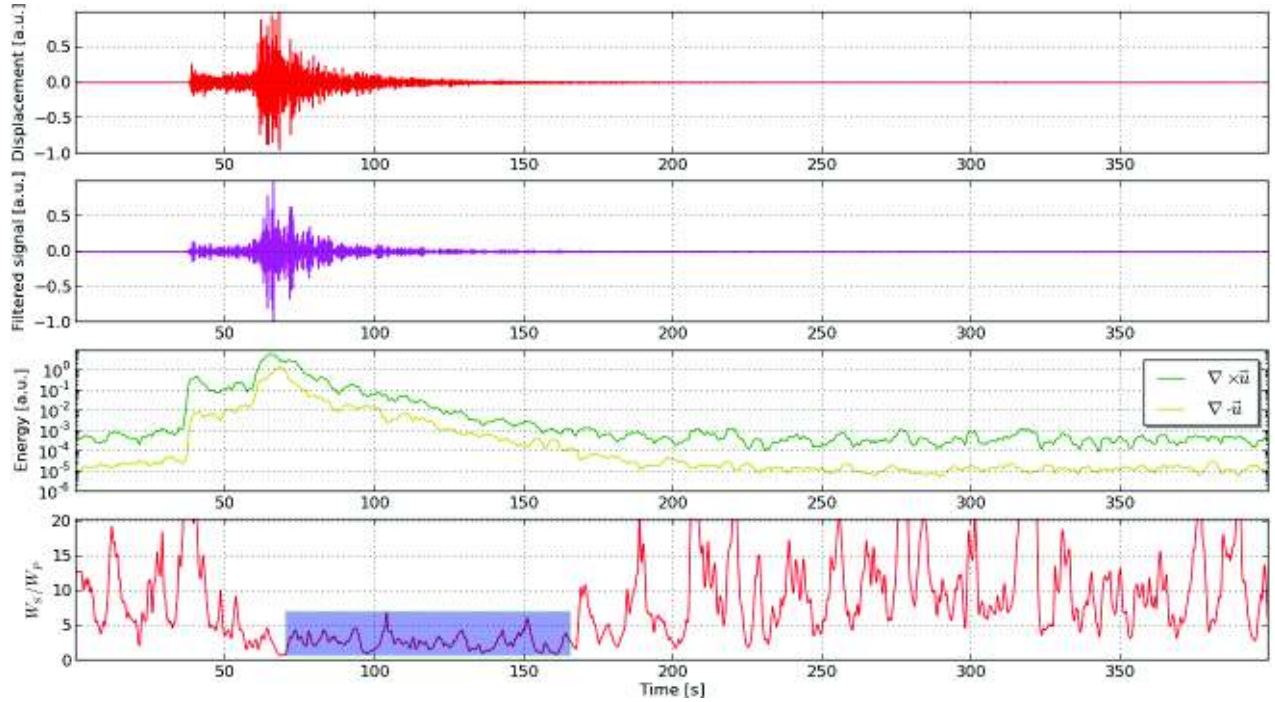
Siguiendo el procedimiento utilizado por otros autores en el pasado (Shapiro et al., 2000; Hennino et al., 2001; Margerin et al., 2009), se utilizó el lenguaje de programación Python y la herramienta de análisis sísmológico ObsPy, complementado con el software SAC, para crear un programa que obtenga a partir de datos de eventos sísmicos reales en el norte de Chile registrados por tres arrays de la red IPOC, la partición de energía de cizalle a la energía compresional y que muestre esta razón en un gráfico para cada instante de tiempo. Python se utilizó para desarrollar el álgebra de matrices necesaria para obtener el resultado, ObsPy entregó las herramientas necesarias para distintos tratamientos de los datos, como lectura de datos en formato MiniSEED o SAC, filtros, remuestreo, suavizado, obtención de envolventes

y distancias inter-estaciones, y SAC se utilizó para seleccionar y cortar los eventos en el día de datos para los cuales se calcularía la razón de energía.

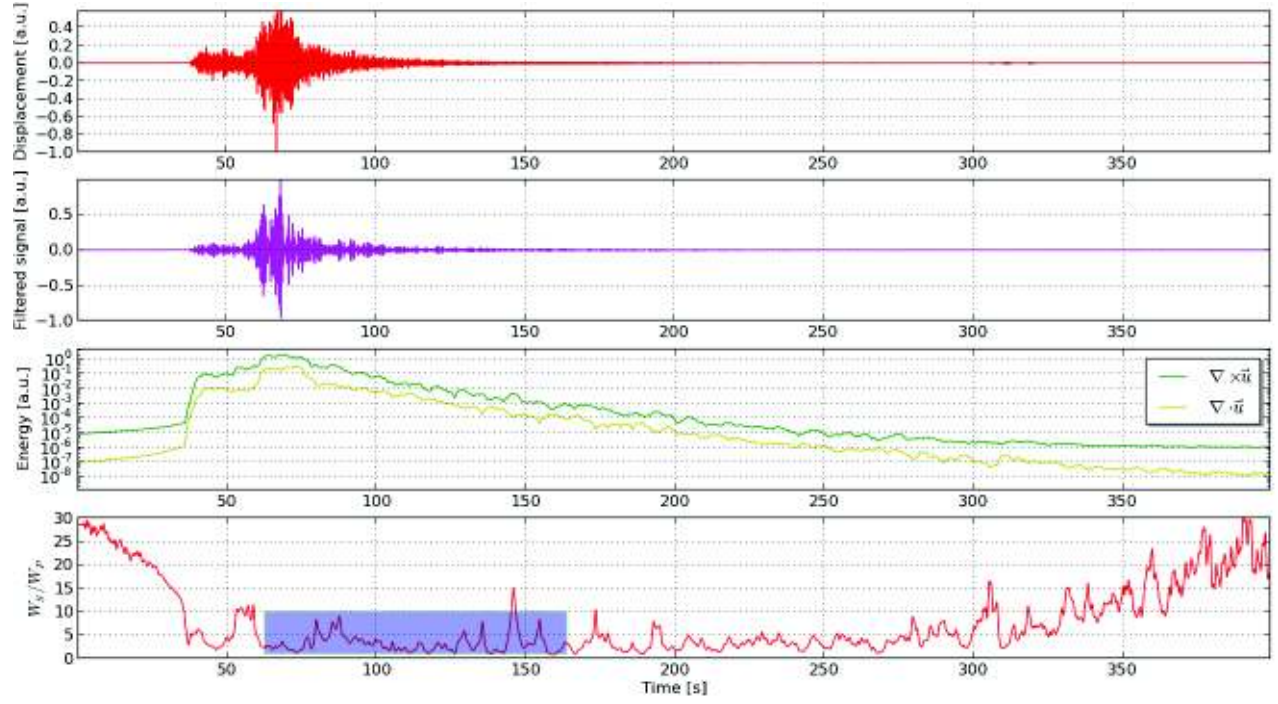
Los eventos extraídos del día de datos del que se dispone son cuatro eventos que son relativamente más intensos que el resto de la actividad de ese día, dos eventos más pequeños y un telesismo ocurrido en Japón.

El rango de frecuencia en el que se estudió la razón de energía corresponde al rango de frecuencias típicas de las ondas de cuerpo, esto es, entre 1 y 10 Hz. En el caso del telesismo se incluyó un rango de frecuencias algo más bajo.

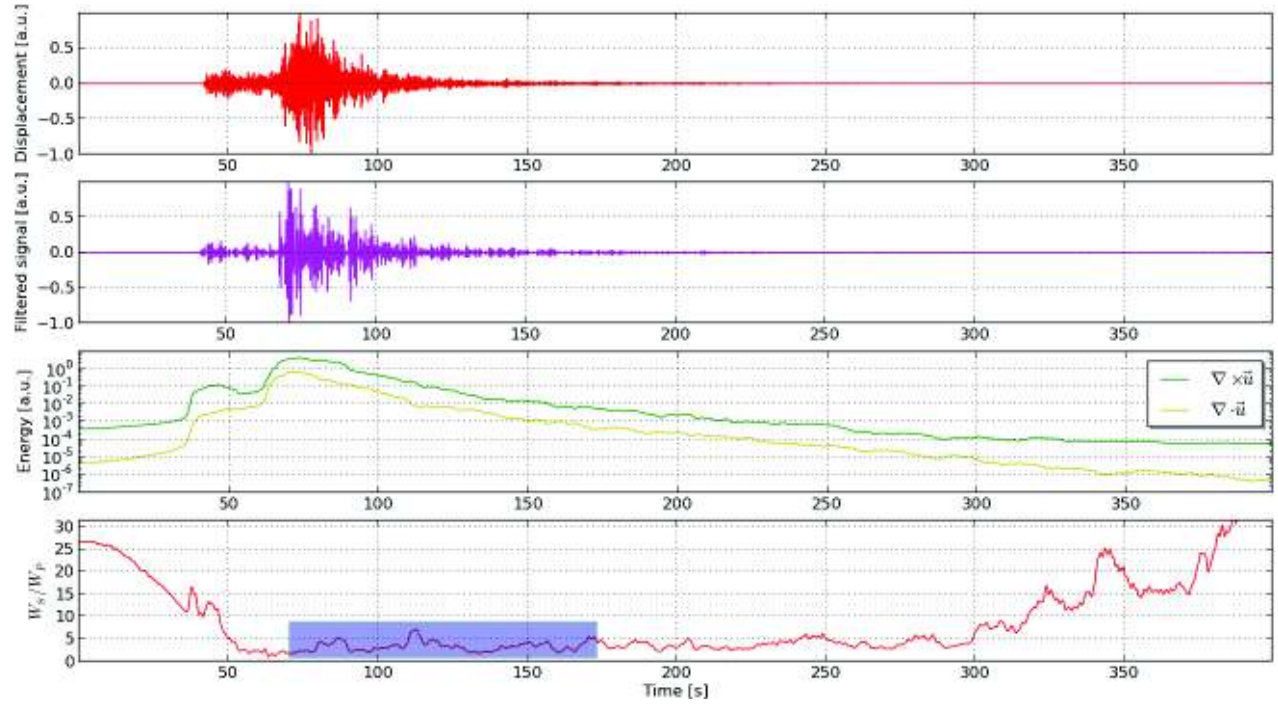
Los resultados de las razones de energía observadas en distintos eventos a través de diferencias finitas fueron diversos. Algunos de ellos se muestran a continuación:



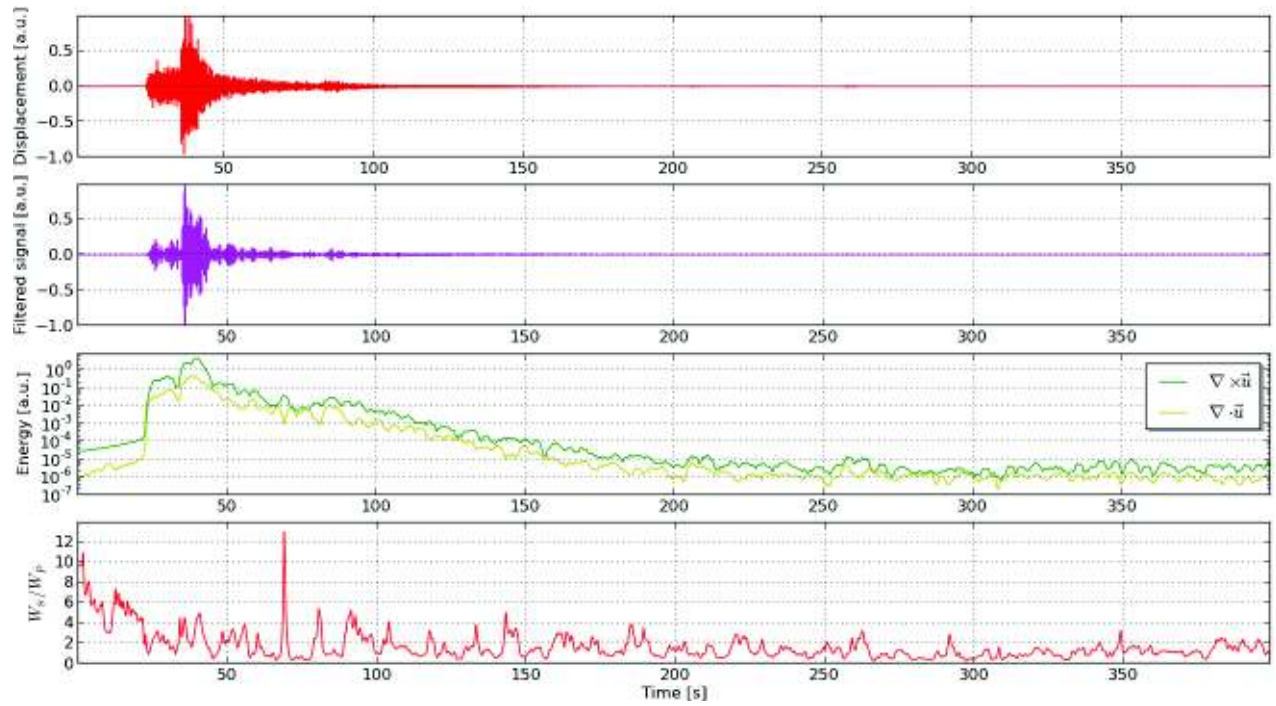
(a) Evento intenso 1. Array 1. Filtro: 5-6 Hz.



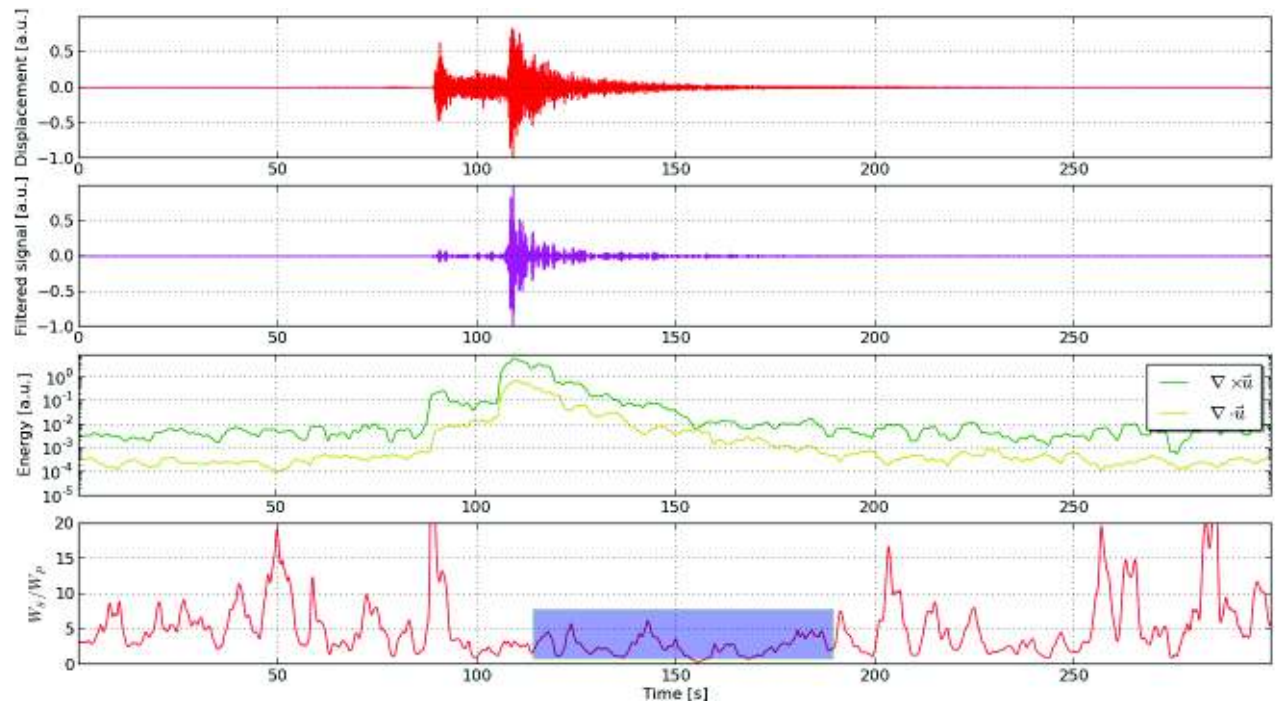
(b) Evento intenso 1. Array 2. Filtro: 5-6 Hz.



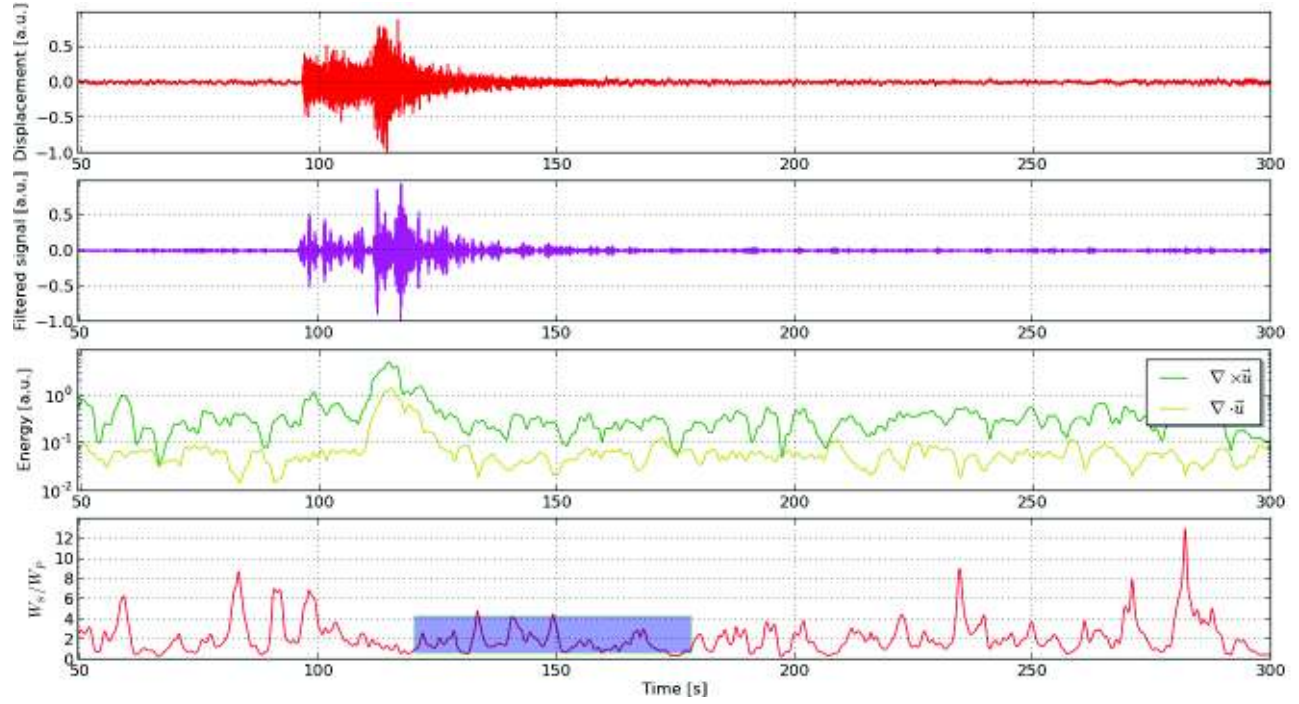
(c) Evento intenso 1. Array 3. Filtro: 1-2 Hz.



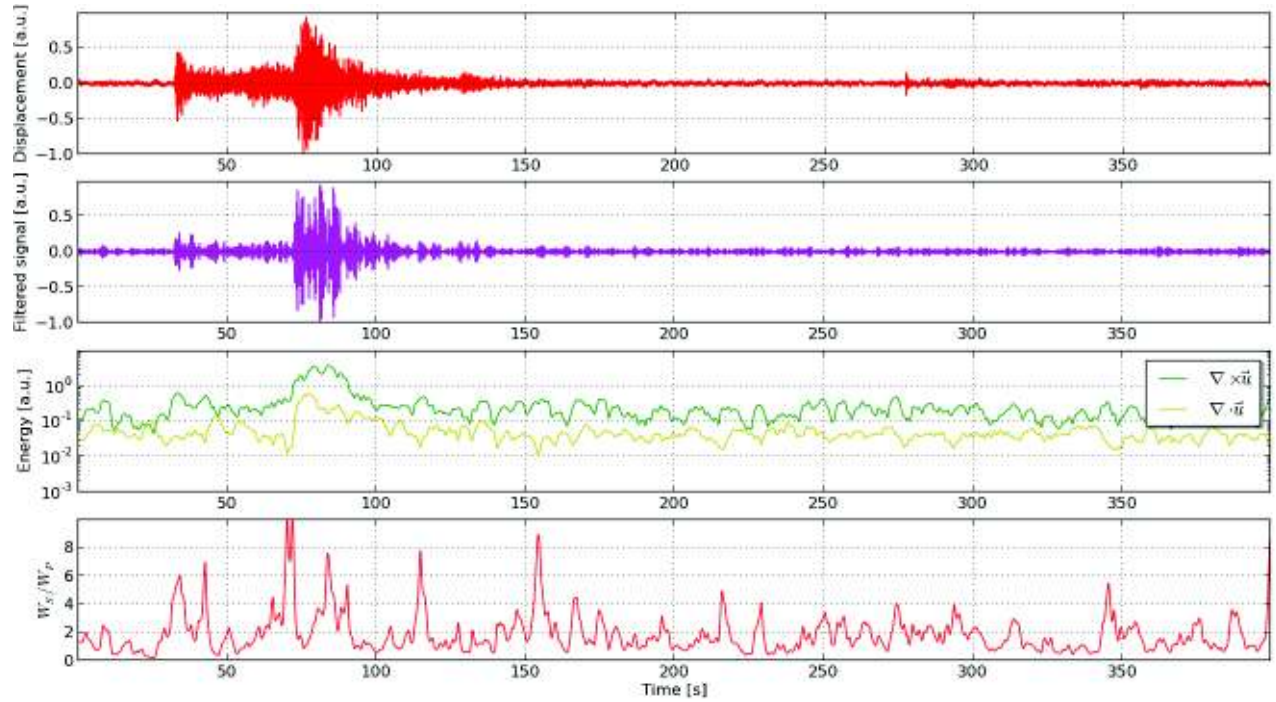
(d) Evento intenso 2. Array 2. Filtro: 7-8 Hz.



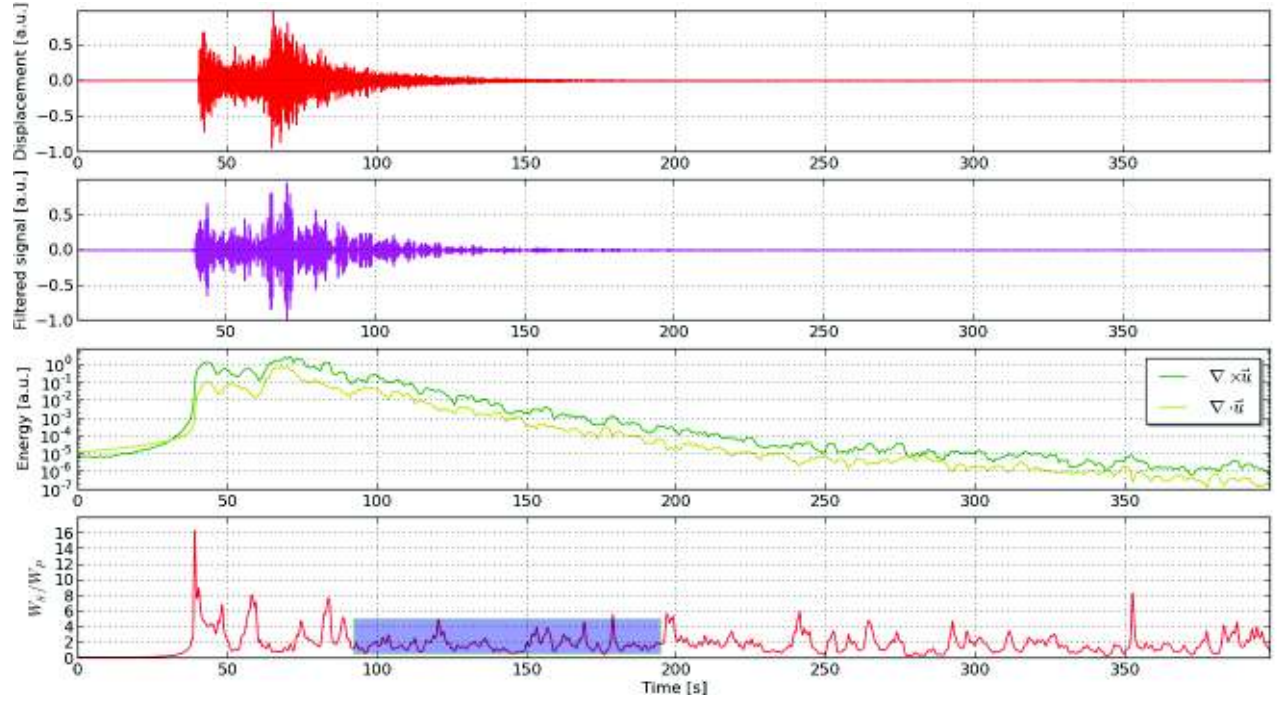
(e) Evento intenso 3. Array 1. Filtro: 4-5 Hz.



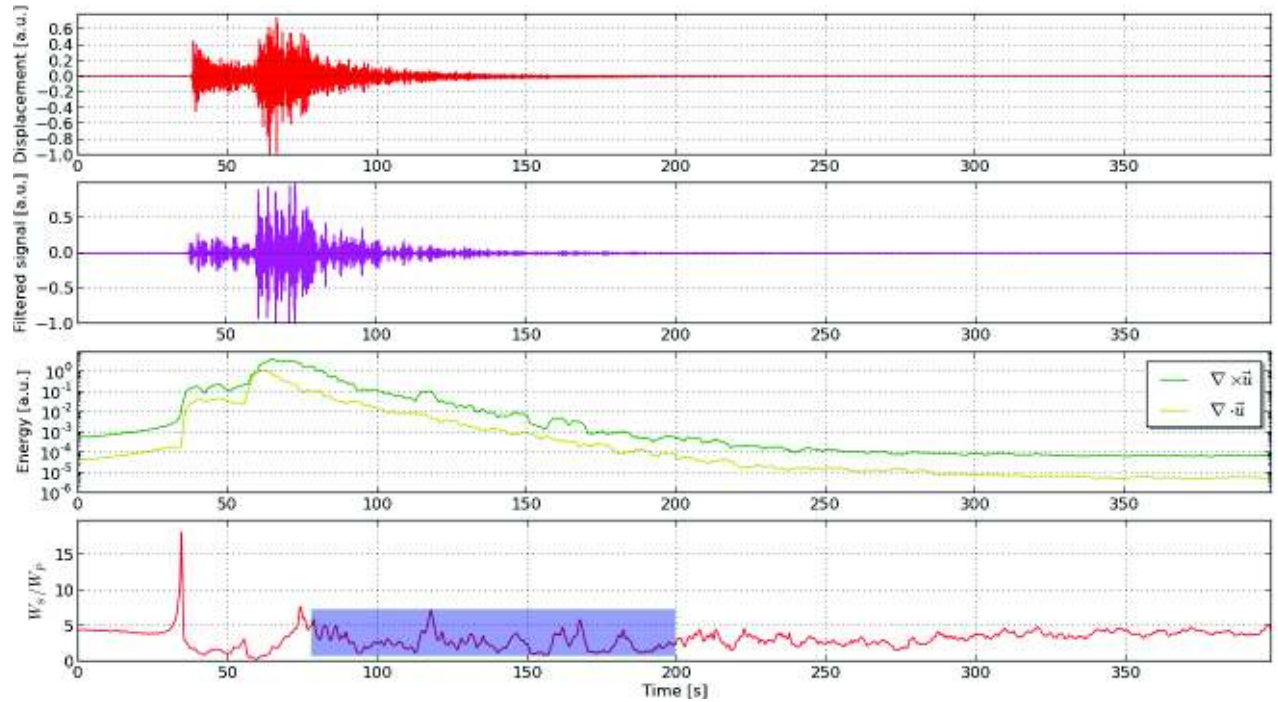
(f) Evento pequeño 1. Array 1. Filtro: 6-7 Hz.



(g) Evento pequeño 2. Array 1. Filtro: 5-6 Hz.



(h) Evento intenso 4. Array 2. Filtro: 6-7 Hz.



(i) Evento intenso 4. Array 3. Filtro: 3-4 Hz.

Figura 7.1: Razón de energía para distintos eventos en el norte de Chile mostrados en cuatro gráficos.

Cada resultado que muestra la Figura 7.1 consiste en cuatro gráficos. El primer gráfico muestra el evento en la componente vertical de una de las estaciones del array usado, el segundo muestra el evento filtrado en la banda de frecuencia para la cual se calculó la razón de energía, el tercero muestra las energías compresional y de cizalle y el cuarto muestra la razón de energía en cada instante de tiempo. En aquellos en que se logra ver lo que sería la estabilización en la razón de energía en la coda, esto se indica con una barra azul.

Como puede observarse, no en todos ellos es posible notar que la razón de energía tiene valores que oscilan poco, es decir, que hay un periodo de tiempo después de la llegada de las ondas directas en que la razón de energía se estabiliza y coincide con la llegada de las ondas de coda. Hay unos cuantos ejemplos en que no es posible observar esta característica. Otro aspecto interesante de mencionar es que el valor en torno al cual oscila la razón de energía es bastante parecido en todos los casos en que se observa esta estabilidad y ese valor está entre 2 y 3, resultado similar al observado por Margerin et al. (2009), de 2.7.

7.2.2. Relación entre la energía observada en superficie y la energía incidente

Como se ha expresado anteriormente, la información que los sismómetros entregan es sobre desplazamientos en la superficie libre, por lo que al calcular la razón de energía con diferencias finitas como se hizo antes, lo que se obtuvo es la energía en superficie, la cual no es igual a la energía que tiene la información de aquello con lo que ha interactuado el frente de ondas y lo ha distorsionado, produciendo scattering, es decir, no es igual a la energía incidente. Esto es porque en superficie se incluye la contribución de las ondas que interactúan en ella (reflexiones en superficie, conversiones P a S o viceversa).

No obstante, se pudo demostrar que es posible separar la razón de energía asociada a las ondas reflejadas en superficie de la razón de energía incidente. Esto había sido hecho anteriormente (Shapiro et al., 2000) a través de la superposición y ponderación de coeficientes de energía para cada tipo de interacción de ondas incidentes con la superficie libre (un coeficiente para la P-P, la P-SV, etc). En este trabajo, sin embargo, esto se hace a través de la superposición de los desplazamientos de las ondas incidentes, multiplicada cada una de ellas por el respectivo coeficiente que la expresa respecto de lo observado en superficie. El resultado al que se llega es la ecuación (6.33).

Esta ecuación relaciona la razón de energía observada en superficie con la razón de energía de las ondas incidentes, relación que puede ser observada en la siguiente Figura:

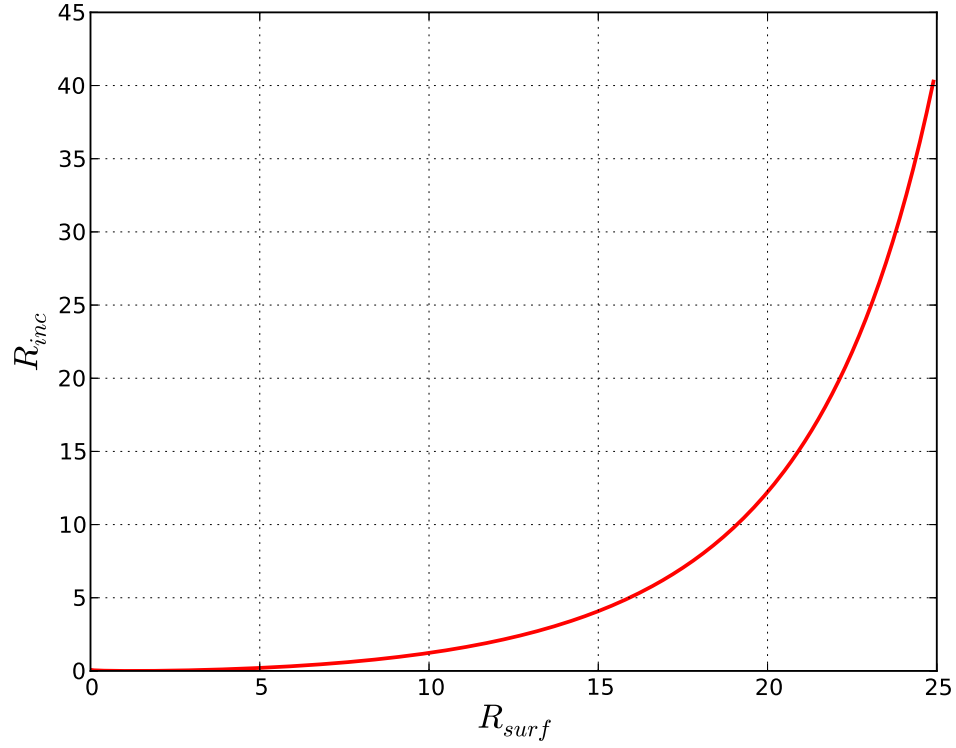


Figura 7.2: Relación entre la razón de energía incidente y la razón de energía observada en superficie en un sólido de Poisson, usando superposición de desplazamientos.

Capítulo 8

Discusión

8.1. Comparación y alcance de los distintos modelos de partición de energía de ondas elásticas

Cuando Aki (Aki, 1969) sugirió que la coda sísmica que se observaba en eventos locales tras la llegada de las ondas principales era producto del scattering de ondas sísmicas debido a la interacción con pequeñas heterogeneidades en el medio por el que se propagan, la mayoría de los estudios posteriores se realizaron bajo el supuesto de que el scattering era producido exclusivamente por la presencia de heterogeneidades. En cuanto al tema de la partición de energía en la coda sísmica, los trabajos realizados hasta ahora comparan los resultados observados con el valor al cual la razón de energía de las ondas elásticas se estabiliza cuando el frente de ondas se propaga por un medio heterogéneo, es decir, 10.39 (para un sólido de Poisson) y toda discrepancia con este valor involucra el efecto de interacciones con interfases (formación de ondas superficiales por efecto de la superficie libre (Shapiro et al., 2000), frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia de una capa de baja velocidad (Margerin et al., 2009)).

Sin embargo, como se mencionó antes, hay estudios de laboratorio que muestran el comportamiento no lineal de las rocas y más aun, hay estudios que muestran que la elasticidad no lineal contribuye a la coda sísmica (Bataille y Calisto, 2008; Calisto et al., 2010), con lo cual uno puede dudar que el modelo de partición de energía para un medio heterogéneo vaya a ajustarse a los valores observados de razón de energía en la coda, o bien, tiene un argumento

más para entender el motivo por el cual esto no sucede.

La primera hipótesis de este trabajo era que el scattering de ondas debido a una reología distinta a la lineal podía explicar de una manera comparable al caso de un medio con heterogeneidades la partición de energía y se encontró un valor de 8 como el valor de partición de energía en la coda. En el caso de un medio heterogéneo, la expresión de la estabilización de la energía depende de las velocidades de las ondas-P y S, las cuales a su vez dependen (o se pueden expresar) en función de las propiedades físicas del medio, como son la densidad y los parámetros de Lamé, lo cual tiene sentido, ya que las fluctuaciones de estos parámetros serán las que describan el tipo de heterogeneidades en el medio, y por otro lado, no depende del tipo de fuente. Por su parte, bajo el razonamiento usado para encontrar la estabilización para una reología de daño, esta depende de la forma en que las energías se traspasan entre sí y el valor encontrado es para el caso particular de ondas planas.

Algo que se puede realizar es probar otros casos particulares, como el de ondas incidentes generadas por un tensor de momento puntual, cuyo desplazamiento es de la forma:

$$u_i(r, t) = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3r}\gamma_i\gamma_j\dot{M}_{jk}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)\gamma_k + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3r}(\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j)\dot{M}_{jk}\left(t - \frac{r}{\beta}\right)\gamma_k \quad (8.1)$$

En primera instancia, parece lógico que la partición de la energía con reología de daño dependa de la forma en que se intercambian las energías compresional y de cizalle. En este trabajo se analizó el caso particular de ondas incidentes planas, para el cual se obtuvo que es simplemente una constante: 8. Es necesario realizar estudios más profundos con distintos ejemplos para ver cómo cambia la estabilización de la energía si se cambia la forma en que se intercambian las energías. Un aspecto interesante (y positivo en cuanto a la primera hipótesis de este trabajo) es que el valor obtenido no es muy lejano al valor de la partición para heterogeneidades, 10.39.

Obviamente, tampoco se espera observar valores de partición de energía que sean iguales o similares a 8, porque en cualquier tipo de scattering el efecto de la superficie libre estará ahí, pero este resultado muestra que la interpretación de los valores observados es más compleja que el simplemente asumir que los valores cambian respecto a lo teórico porque haya estratificación o interfases que se deben considerar.

Ambos mecanismos de scattering de ondas sísmicas son diferentes y ambos modelos de

partición de energía son excluyentes, ya que no consideran la existencia del otro. Una interpretación más realista sería que la partición en la coda sísmica se debe a una combinación de ambos mecanismos que generan scattering, es decir, que las ondas se propagan de la fuente interactuando a la vez con heterogeneidades y no-linealidades en el medio, no siendo estas interacciones independientes entre sí. Esto permite pensar, por ejemplo, en el caso de una onda que es scattereada por interacción con una heterogeneidad en el medio y posteriormente se encuentra con una fractura en el medio, el cual también la scatterea, para finalmente llegar al instrumento que la registra. Ninguno de los modelos contempla esta posibilidad.

8.2. Cuantificación del efecto de la superficie libre en las mediciones de energía compresional y de cizalle

La Figura 7.1 representa lo que se ha usado en otros trabajos para observar la partición de energía en la coda sísmica. El resultado usando eventos reales respalda en un grado alto las observaciones en trabajos anteriores: al parecer es posible observar que la razón de energía se estabiliza durante el paso de la coda sísmica, lo cual sería explicado por el argumento de que en las ondas de coda la energía se equiparticiona, ya que la coda tiene un carácter difusivo. Antes de emitir alguna conclusión es interesante discutir el efecto de la superficie libre en las mediciones de energía.

8.2.1. La relación entre la energía observada en superficie y la energía incidente: un filtro

Como se vio antes, el desplazamiento total en superficie de una onda-P o una onda-S incidente consistirá en las contribuciones de las ondas incidentes y las distintas ondas reflejadas, como lo expresan las ecuaciones (6.1), (6.14) y (6.23). La energía compresional y de cizalle observada en superficie para las ondas incidentes P, SV y SH será proporcional a la energía de la respectiva onda incidente, tal como lo ilustran las ecuaciones (6.8), (6.11), (6.17), (6.20) y (6.25). En estas ecuaciones, la energía observada en superficie y la energía incidente se relacionan a través de un factor que depende del ángulo de incidencia de la onda. Esta dependencia de los factores con el ángulo para cada interacción con la superficie libre se muestra

en la siguiente Figura:

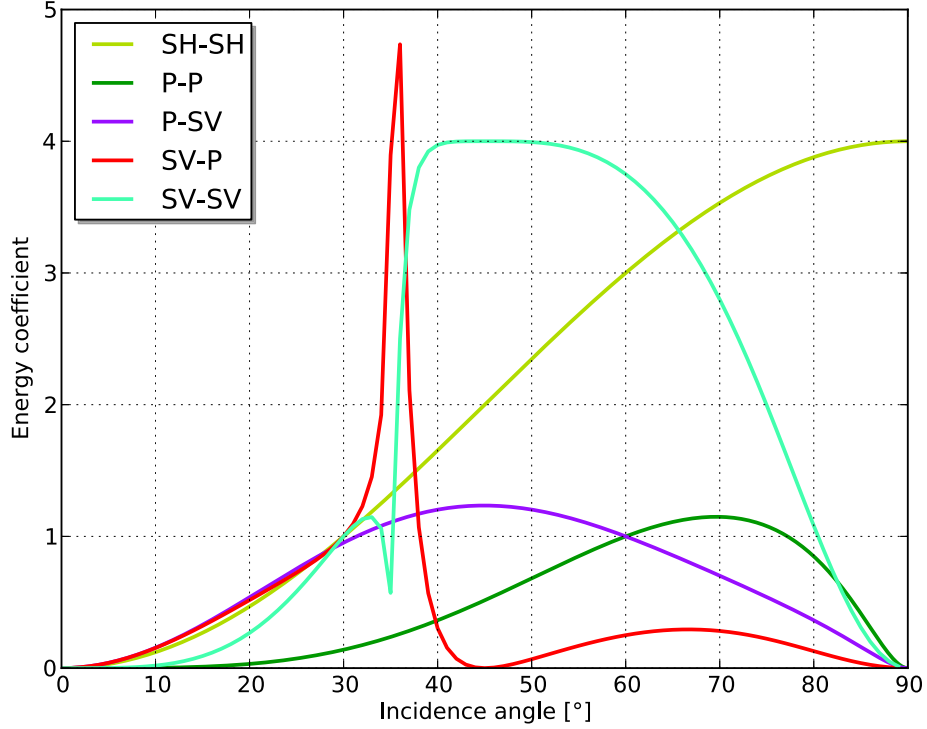


Figura 8.1: La dependencia angular de los coeficientes que relacionan la energía de las ondas incidentes con la energía aparente compresional y de cizalle observada en la superficie libre para un medio de Poisson.

De la Figura 8.1 se puede observar cualitativamente la magnitud del error asociado a la estimación de la energía incidente a partir de la energía en superficie. Por ejemplo, para una onda-P que incide con un ángulo θ relativamente pequeño, a decir 30° , la energía de cizalle que se calcule será mayor que la energía compresional, lo que significaría que una onda-P incidente podría aparecer en la energía como una onda-S. Obsérvese también cómo estos coeficientes que relacionan ambas energías prácticamente eliminan las ondas que inciden con ángulos cercanos a 0° , o cercanos a 90° (en este último caso la excepción es el coeficiente de energía SH-SH).

Se puede concluir a partir de esta Figura que la energía aparente en superficie esté relacionada con la energía incidente a través de una función que actuará como una especie de filtro para toda interacción con la superficie libre. Considerando el caso de equipartición de

energía, la contribución a la energía compresional y de cizalle debería ser la misma sin importar el ángulo de incidencia del frente de ondas, por lo cual, la energía en superficie no representa la razón de energía de cizalle a compresional y hay que obtener de alguna forma la energía incidente.

8.2.2. Energía incidente en función de la energía en superficie: superposición de energía versus superposición de desplazamientos

La observación hecha anteriormente también había sido hecha por Shapiro et al. (2000). Ellos afirman que pese al efecto de la superficie libre es posible observar la partición de energía para este campo difusivo. Para ello integran de 0 a $\pi/2$ los cinco coeficientes que relacionan la energía incidente con la energía superficial y obtienen coeficientes angulares promedio. Asumiendo que las energías de las ondas SV y SH son iguales, la razón de energía aparente (la observada en superficie) en función de la incidente se obtiene simplemente haciendo una ponderación de estos coeficientes, de modo que obtienen la siguiente relación:

$$R_{sup} = \frac{\frac{R_{inc}}{2} W_{SV \rightarrow SV} + \frac{R_{inc}}{2} W_{SH \rightarrow SH} + W_{P \rightarrow SV}}{\frac{R_{inc}}{2} W_{SV \rightarrow P} + W_{P \rightarrow P}} = \frac{2.45 R_{inc} + 0.75}{0.2 R_{inc} + 0.64} \quad (8.2)$$

Lo que ellos dicen es que si se asume equipartición de la energía en la coda (es decir, que $R_{inc} = 10.39$), el valor que observarán usando la ecuación (8.2) es aproximadamente 10, pero también consideran las ondas superficiales debido a la interacción de las ondas de cuerpo con la superficie libre, con lo cual el valor que esperan observar fluctúa entre 6 y 10. Sus resultados muestran valores de la razón de energía en la coda de aproximadamente 7.

El resultado que Margerin et al. (2009) obtienen en su trabajo entrega valores de la estabilización de la razón de energía cercanos a 2.8, es decir, unas 2.5 veces menor al valor que obtienen Shapiro et al. Para explicar estas observaciones, ellos desarrollan la teoría de equipartición para un semiespacio elástico estratificado. Con esta teoría ellos llegan a la conclusión de que cerca de la frecuencia de resonancia de una capa de baja velocidad la razón de energía decrece fuertemente, lo cual explicaría sus resultados y la diferencia con el trabajo de Shapiro et al.

En el presente trabajo se analizó el caso en que la relación entre la partición de energía incidente y la partición de energía en superficie se obtenía a través de superposición de

desplazamientos. Realizando tal procedimiento, se llegó a la relación:

$$R_{inc} = \left(\frac{4.62\sqrt{R_{sup}} - 5.15}{18.39 - 3.12\sqrt{R_{sup}}} \right)^2 \quad (8.3)$$

Es conveniente recurrir a un gráfico para comparar ambas relaciones entre las particiones de energías:

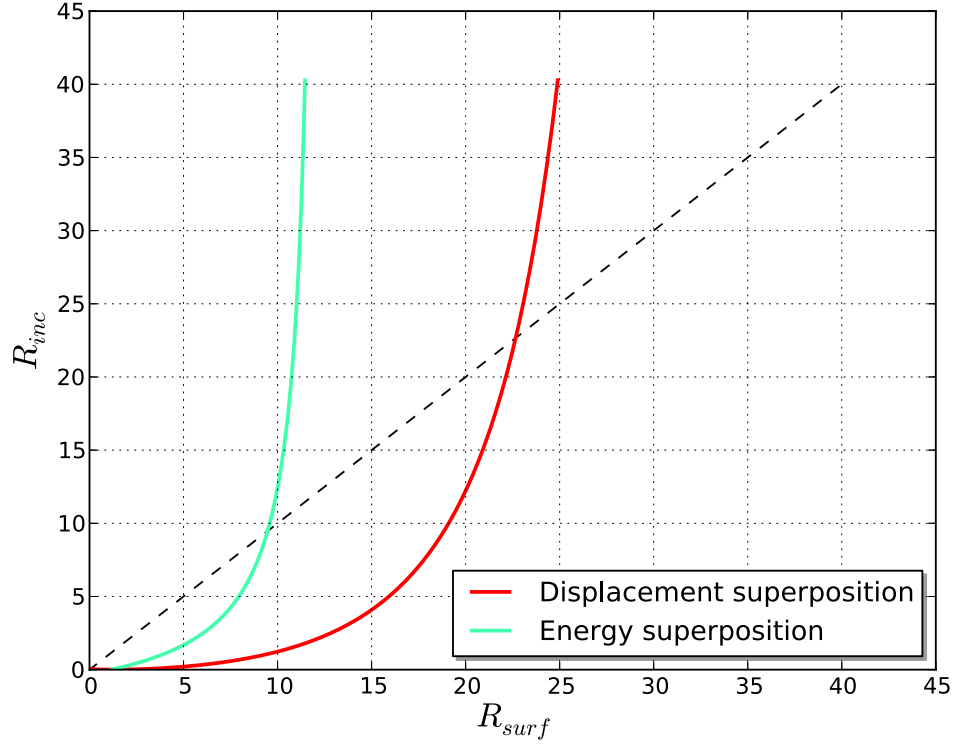


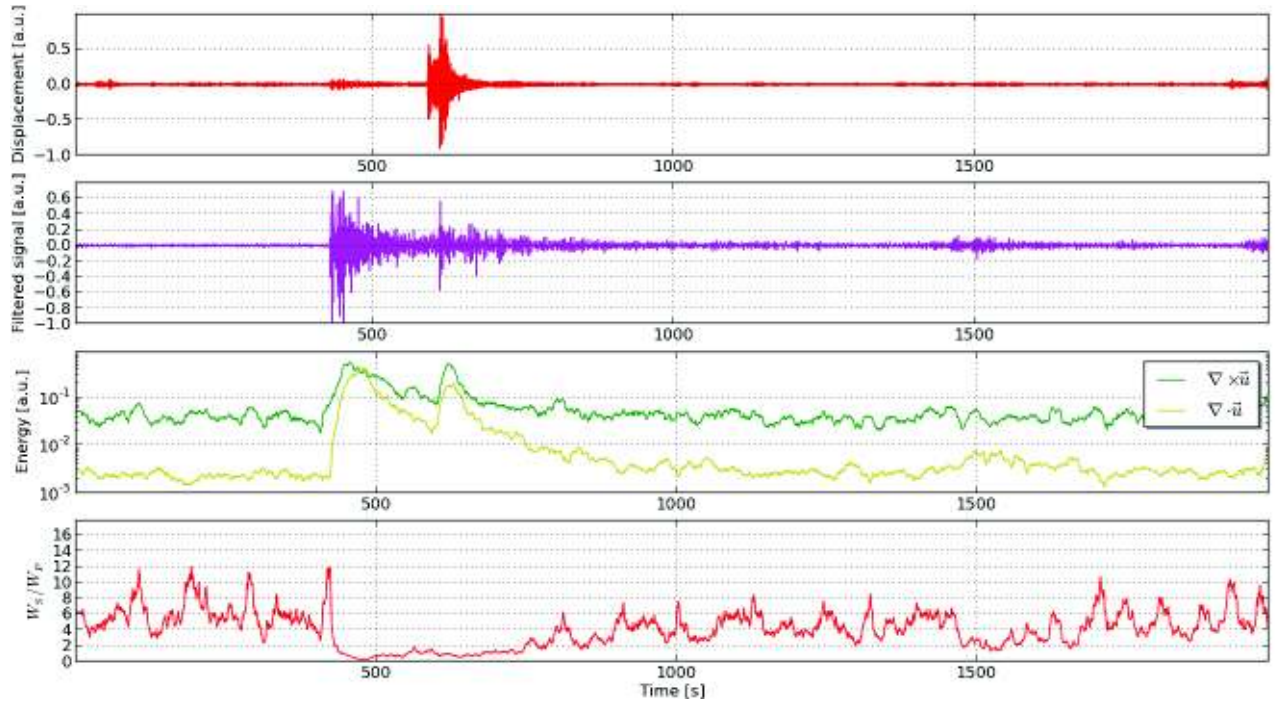
Figura 8.2: Relación entre la partición de energía incidente y superficial con superposición de desplazamientos y superposición de energías.

Se puede observar que para el caso de equipartición la razón de energía observada será cercana a 10 en la superposición de energías. En el caso de superposición de desplazamientos, los valores que corresponden a un $R_{inc} = 10.39$ son valores cercanos a 20.

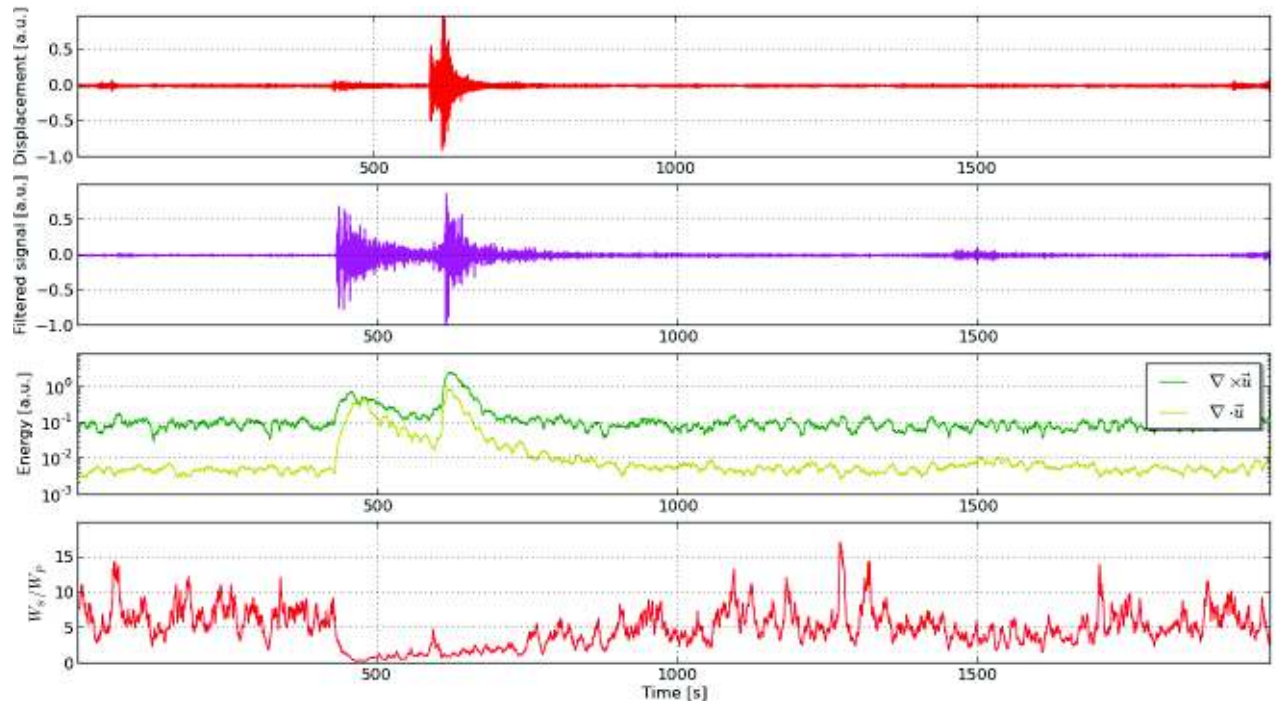
Claramente, los dos métodos no son iguales, relacionan las dos razones de energía de una forma diferente y se obtienen de forma diferente, pero ¿habrá uno de los dos que es físicamente más correcto que el otro? La relación de superposición de energías parece relacionar las razones de energía incidente y superficial de una forma que es más cercana a la identidad,

aunque las mediciones de energía superficial deberán estar muy acotadas, ya que esta relación entre las razones tiene un polo cercano a 12. Esta es una característica que ambas relaciones comparten, el polo de la relación de energías por superposición de desplazamientos es cercano a 30, por lo que ambos coeficientes que relacionan las razones perderán sensibilidad a medida que R_{sup} crece.

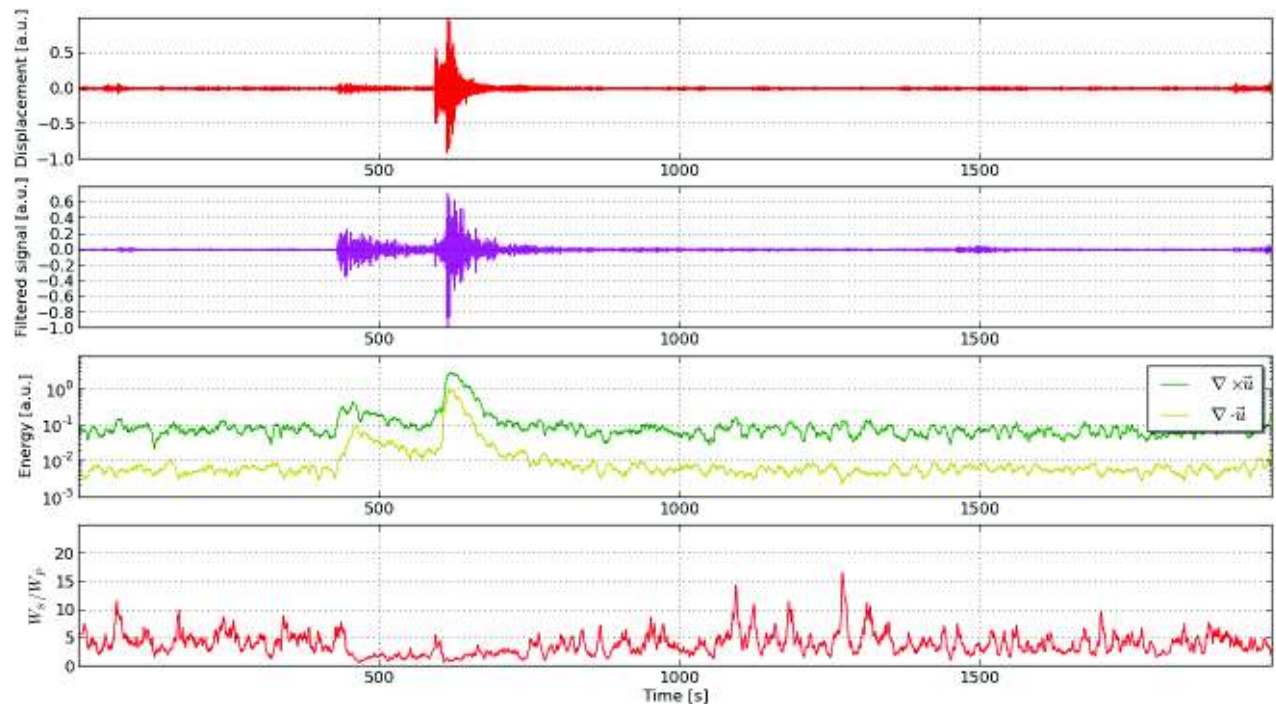
Con todo lo antes expuesto y sabiendo que la razón de energía superficial no estaría representando directamente lo que pasa con la partición de la energía en el interior de la Tierra, un resultado bastante interesante se puede observar en el telesismo. Para este evento se puede observar que no se trata solamente de un telesismo, sino que tiempo después de la llegada de la onda-P del telesismo aparece un evento local. Esto es respaldado a través de filtros, los cuales a bajas frecuencias acentúan las ondas del telesismo, mientras que a frecuencias más altas acentúan el sismo local. Lo interesante es cómo va cambiando la partición de energía aparente a medida que se filtra el evento (o los eventos) en frecuencias más altas:



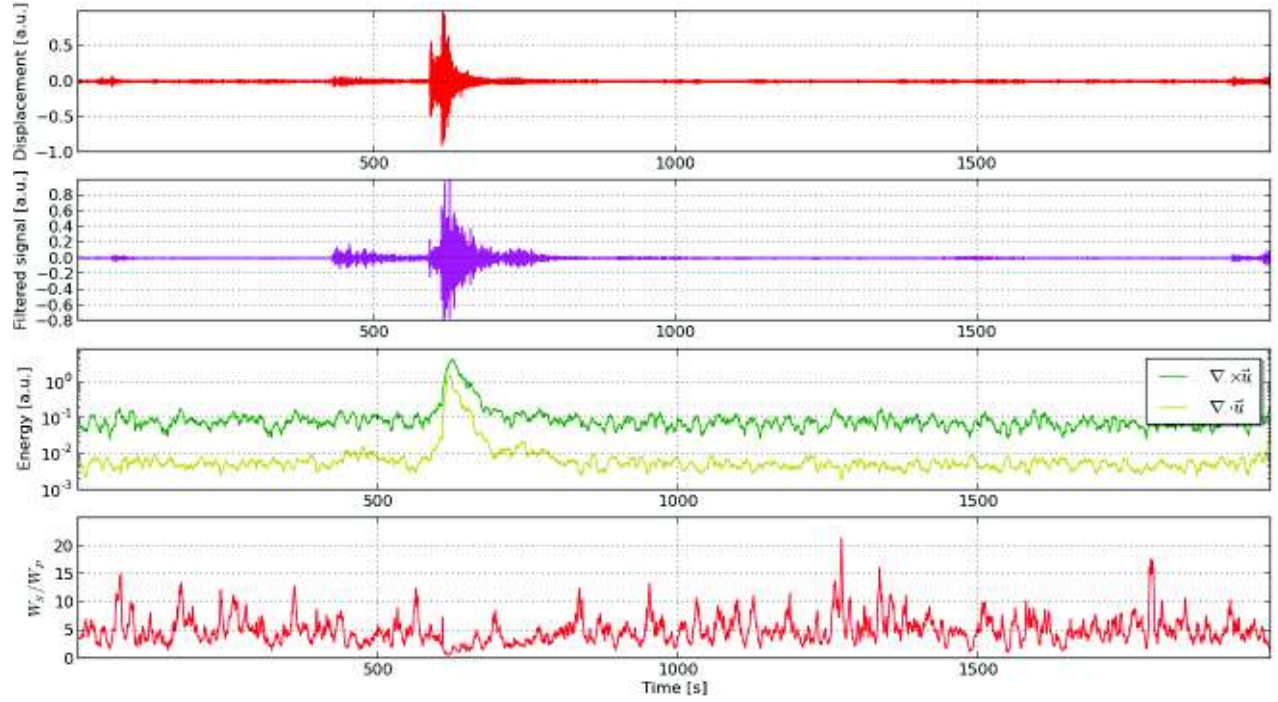
(a) Telesismo. Array 1. Filtro: 0.1-1.1 Hz.



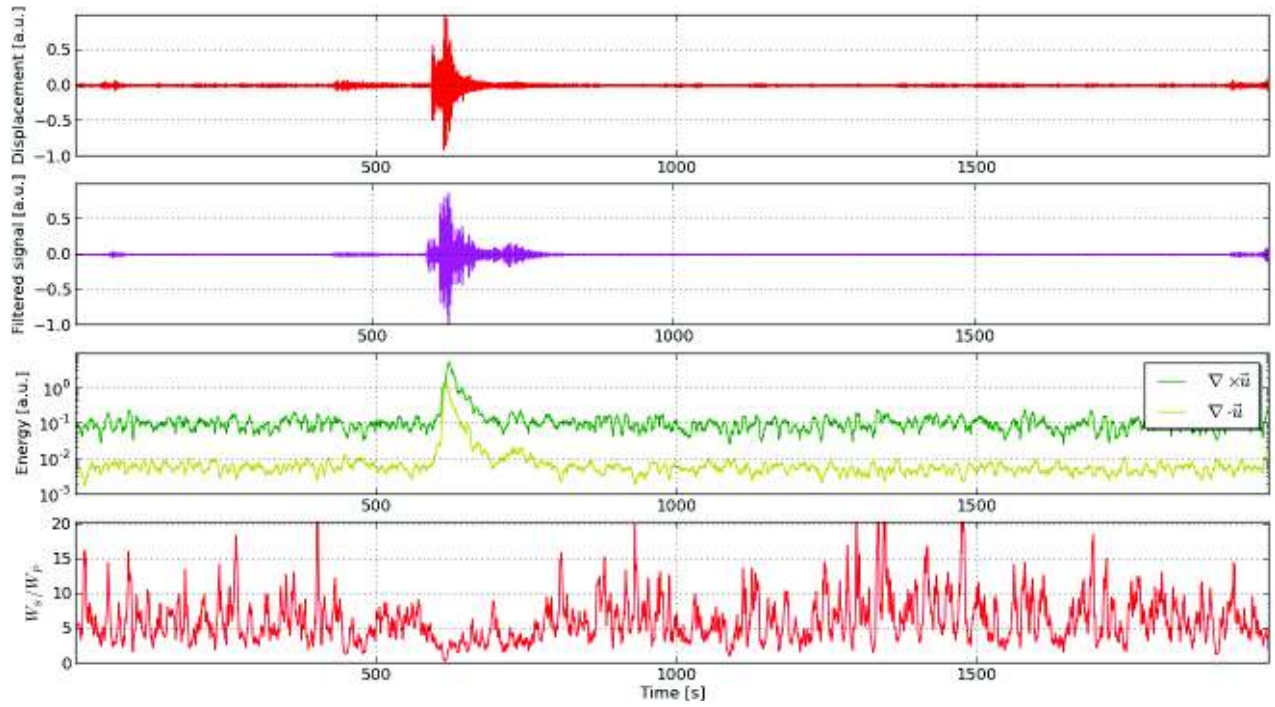
(b) Telesismo. Array 1. Filtro: 0.5-2 Hz.



(c) Telesismo. Array 3. Filtro: 1-2 Hz.



(d) Telesismo. Array 1. Filtro: 1.5-2.5 Hz.



(e) Telesismo. Array 1. Filtro: 2-3 Hz.

Figura 8.3: Partición de la energía en distintas bandas de frecuencia para el telesismo.

El filtro en frecuencias más bajas hace destacar la onda-P del telesismo. Más aun, en la

coda de la onda-P del telesismo se puede apreciar valores de la razón de energía menores a 1, lo cual es interesante, ya que teóricamente la partición de energía incidente debería variar entre 0 (solamente ondas-P) e infinito (solo ondas-S), entonces de acuerdo a la teoría de equipartición, en la coda de la onda-P no se observaría equipartición de la energía. Para frecuencias más altas, el telesismo está atenuado y se puede observar la estabilización de la razón de energía para el evento local.

Es interesante finalizar esta discusión destacando que los valores observados para la estabilización de la razón de energía en la coda obtenidos en este trabajo son muy similares a los obtenidos por Margerin et al. Hay que recordar que ellos postulan a que debido a frecuencias cercanas a la de resonancia para capas de baja velocidad, la razón de energía decae fuertemente y esto explicaría sus resultados, los cuales además apoyan con estudios del tipo de suelo en la zona, que dicen que los primeros 50-70 *m* de profundidad están compuestos de granito erosionado con bajas velocidades sísmicas. Sin conocer el tipo de suelo bajo los arrays de la red IPOC en el norte de Chile, cabe hacerse la pregunta: ¿en el norte de Chile también existe una capa de baja velocidad, la cual ocasiona que los valores de estabilización de la razón de energía en la coda sísmica caiga hasta valores cercanos a 2.8? También quedan abiertas otras preguntas: aparte de los valores observados en el array de Chilpancingo, México y el observatorio Pinyon Flats, Estados Unidos, ¿qué valores de estabilización de la razón de energía se observan en otros lugares del mundo? ¿Todas las observaciones de razones cercanas a 2.8 estarán justificadas por la existencia de una capa de baja velocidad, o servirán para inferir que bajo las estaciones existe una? Si solamente se observara resultados como la Figura 8.4, ¿se podría pensar erróneamente que la estabilización en la razón de energía llega incluso antes de la coda?

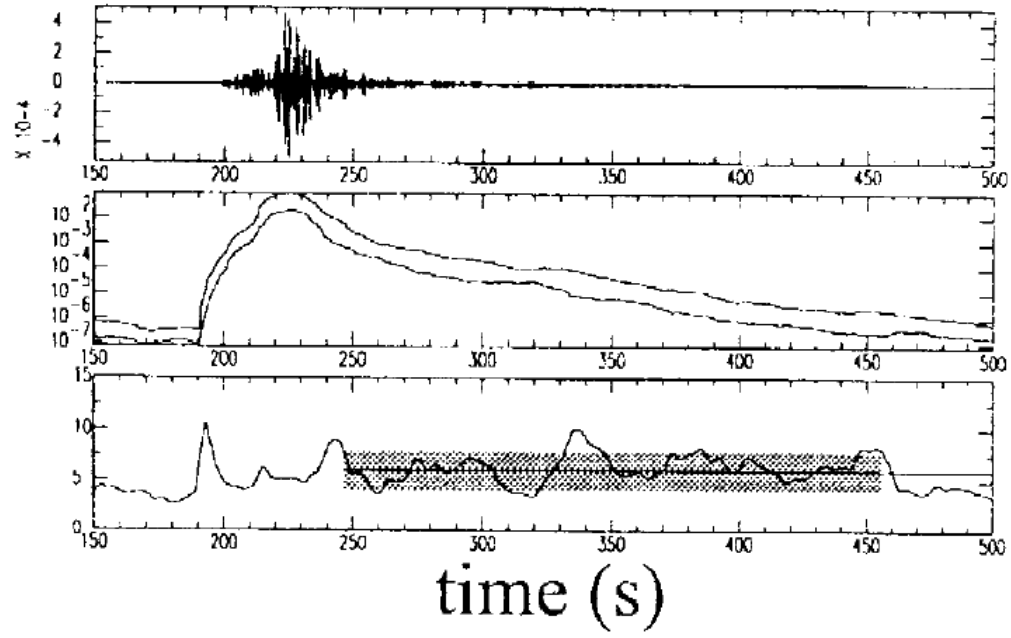


Figura 8.4: Observación de la estabilización de la razón de energía en la coda, Shapiro et al. (2000).

Y por último, ¿existe otra forma de obtener la partición de energía de ondas elásticas?

Capítulo 9

Conclusiones

La evidencia de que una reología no lineal produce scattering, lo cual se debe reflejar en las llegadas de las ondas de coda, es un antecedente importante para cuestionarse los trabajos realizados hasta ahora respecto a la partición de energía en la coda, ya que los modelos con los cuales se comparan las observaciones de partición a partir de datos reales solamente consideran la interacción de las ondas incidentes con heterogeneidades y con interfases.

En este trabajo se pudo mostrar que para una reología de daño también es posible encontrar que la energía se particiona tras un lapso de tiempo entre la energía de cizalle y la energía compresional y el valor al cual se estabiliza la razón de energía encontrado en este caso es comparable con el caso de scattering por heterogeneidades, siendo un valor de 8 versus el 10.39 ya mencionado.

Se debe recalcar que un modelo más realista del scattering de ondas sísmicas contemplará a estas interactuando con heterogeneidades en el medio y al mismo tiempo con el daño, de modo que estas interacciones no serán independientes. Los dos modelos de partición de energía estudiados en este trabajo son independientes, ya que no consideran el efecto del otro.

Por otra parte, el modelo de diferencias finitas para la aproximación de las energías y estudio de la partición de energía ha entregado resultados que deja preguntas abiertas. Primeramente, no parece una tarea fácil interpretar las observaciones de partición de energía en la coda, debido en parte a que no existe un modelo teórico más realista que considere más factores, como la reología de daño como fuente de scattering. Se debe observar la partición de energía usando arrays en otros lugares del mundo para ver cómo se ajustan los argumentos entregados

por autores en el pasado para explicar estos resultados y de ser posible, obtener información sobre el tipo de suelo bajo las estaciones. En segundo lugar, no se debe olvidar el efecto de la superficie libre, el cual hace que la energía observada en superficie y la energía incidente se relacionen mediante un coeficiente que actúa como un filtro en función del ángulo incidente de las ondas.

Referencias

- Aki, K. (1969). Analysis of seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *J. Geophys. Res.*, **74**, 615-631.
- Aki, K. and Chouet, B. (1975). Origin of coda waves: origin, attenuation and scattering effects. *J. Geophys. Res.*, **80**, 3322-3342.
- Aki, K. (1980). Attenuation of shear waves in the lithosphere for frequencies from 0.05 to 25 Hz. *Phys. Earth Planet Inter.* **21**, 50-60.
- Aki, K. and Richards, P.G. (2002). Quantitative seismology, second edition. *University Science Books*.
- Bataille, K. and Calisto, I. (2008). Seismic coda due to non-linear elasticity. *Geophys. J. Int.*, **172**, 572-580.
- Ben-Menahem, A. and Singh, S.J. (1981). Seismic waves and sources. *Springer-Verlag New York Inc.*
- Birch, F. (1961). The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars. *J. geophys. Res.*, **66**, 2199-2224.
- Budiansky, B. and O'Connell, R.J. (1976). Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Struct.*, **12**, 81-97.
- Calisto, I., Bataille, K., Stiller, M. and Mechie, J. (2010). Evidence that nonlinear elasticity contributes to the seismic coda. *Geophys. J. Int.*, **180**, 1353-1358.
- Fehler, M., Sato, H. (2003). Coda. *Pure appl. Geophys.*, **160**, 541-554.
- Johnson, P.A. and McCall, K.R. (1994). Observations and implications of nonlinear elastic wave response in rock. *Gephys. Res. Lett.*, **21**, 165-168.

- Hennino, R., Trégourès, N., Shapiro, N.M., Margerin, L., Campillo, M., van Tiggelen, B.A. and Weaver, R.L. (2001). Observation of equipartition of seismic waves. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3447-3450.
- Kawahara, J. and Yamashita, T. (1992). Scattering of elastic waves by a fracture zone containing randomly distributed cracks. *Pure appl. Geophys.*, **139**, 121-144.
- Lyakhovsky, V., Reches, Z., Weinberger, R. and Scott, T.E. (1997). Non-linear elastic behavior of damaged rocks. *Geophys. J. Int.* **130**, 157-166.
- Margerin, L., Campillo, M., Van Tiggelen, B.A. and Hennino, R. (2009). Energy partition of seismic coda waves in layered media: theory and application to Pinyon Flats Observatory. *Geophys. J. Int.* **177**, 571-585.
- Morse, P.M. and Feshback, H. (1953). Methods of theoretical physics. *McGraw-Hill*.
- Nikolaev, A.V. (1989). Scattering and dissipation of seismic waves in the presence of non-linearity. *Pure appl. Geophys.*, **131**, 687-702.
- O'Connell, R.J. and Budiansky, B. (1974). Seismic velocities in dry and saturated cracked solids. *J. geophys. Res.*, **79**, 5412-5426.
- Ryzhik, L.V., Papanicolaou, G.C. and Keller, J.B. (1996). Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion*, **24**, 327-370.
- Shapiro, N.M., Campillo, M., Margerin, L., Singh, S.K., Kostoglodov, V. and Pacheco, J. (2000). The energy partitioning and the diffusive character of the seismic coda. *Bull. seism. Soc. Am.* **90**, 655-665.
- Weaver, R.L. (1982). On diffuse waves in solid media. *J. Acoust Soc. Am.* **71**, 1608-1609.
- Wu, R.S. (1989). The perturbation method in elastic wave scattering. *Pure appl. Geophys.* **131**, 605-637.
- Zheng, H., Zhang, Z. and Liu, E. (2006). Nonlinear seismic wave propagation in anisotropic media using the flux-corrected transport technique. *Geophys. J. Int.*, **165**, 943-956.

Apéndice A

Fuerza externa para una onda plana incidente

Para una onda plana incidente descrita por $u_i = a_i e^{i(\omega t - k_j x_j)}$, se obtiene los siguientes términos de la fuerza externa:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{i}{2}(u_i k_j + u_j k_i) \quad (\text{A.1})$$

$$\varepsilon_{ij,j} = -\frac{1}{2}(u_i k^2 + (u_j k_j) k_i) \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_{ll} = I_1 = -iu \cdot k \quad (\text{A.3})$$

$$\varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij,j} = \frac{i}{2}(u_j k_j)(u_i k^2 + (u_j k_j) k_i) \quad (\text{A.4})$$

$$(I_1)_i = -(u_j k_j) k_i \quad (\text{A.5})$$

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} = I_2 = -\frac{1}{2}((u_j k_j)^2 + u^2 k^2) \quad (\text{A.6})$$

$$(I_2)_i = i((u_j k_j)^2 + u^2 k^2) k_i \quad (\text{A.7})$$

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kk,j} = \frac{i}{2}(u_j k_j)(u_i k^2 + (u_j k_j) k_i) \quad (\text{A.8})$$

$$\varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ml,j} = -\frac{i}{2}(u_j k_j)((u_j k_j)^2 + u^2 k^2)(u_i k^2 + (u_j k_j) k_i) \quad (\text{A.9})$$

Con lo cual, la fuerza externa es:

$$g_i = \sigma_{ij,j}^{nl} = i\eta \sqrt{I_2} k_i \quad (\text{A.10})$$

En particular, para ondas-P y ondas-S es:

$$g_i^p = -\eta u k k_i \quad (\text{A.11})$$

$$g_i^s = -\frac{1}{\sqrt{2}} \eta u k k_i \quad (\text{A.12})$$

Apéndice B

Energía compresional

Anteriormente se mostró que la contribución a la onda compresional en superficie debido a una onda-P que llega con un ángulo de incidencia e y una onda-SV que llega con un ángulo f es:

$$W^p(u_p, u_{sv}; e, f) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [u_p F(e) + u_{sv} H(f)]^2 \quad (\text{B.1})$$

donde e y f son los ángulos de incidencia de las ondas P y SV respectivamente.

Si se tiene muchas ondas-P de amplitud u_p , onda-SV de amplitud u_{sv} y ondas-SH de amplitud u_{sh} llegando de todas las direcciones, la energía compresional total en superficie es:

$$W^p(P, S) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \left[u_p \int F(e) d\Omega + u_{sv} \int H(f) d\Omega \right]^2 \quad (\text{B.2})$$

En la superficie libre, $d\Omega$ cubre una semiesfera, por lo que los límites de integración son $0 < \phi < 2\pi$ y $0 < e < \pi/2$. Se definen:

$$A \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F(e) \sin(e) de d\phi = 4\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(e) \sin(2e) \sin(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} de \quad (\text{B.3})$$

y

$$B \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} H(f) \sin(f) df d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{(\alpha/\beta) \sin(f) \sin(4f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta^2) \cos^2(2f)} df \quad (\text{B.4})$$

de modo que:

$$W^p(P, S) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [u_p A + u_{sv} B]^2 \quad (\text{B.5})$$

que solo depende de la amplitud de las ondas P y S (A y B son constantes).

Apéndice C

Energía de cizalle

De modo similar a la energía compresional, la energía de cizalle en la superficie libre es:

$$W^s(P, S) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [u_p G(e) + u_{sv} I(f) + u_{sh} J(f)]^2 \quad (C.1)$$

Considerando que las ondas de cizalle tienen la misma amplitud, $u_{sv} = u_{sh} = u_s$ y definiendo:

$$C \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(e) \sin(e) de d\phi = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha/\beta) \sin(e) \sin(2e) \cos(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} de \quad (C.2)$$

$$D \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(f) \sin(f) df d\phi = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(f) \sin(2e) \sin(2f)}{\sin(2e) \sin(2f) + (\alpha/\beta)^2 \cos^2(2f)} df \quad (C.3)$$

$$E \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J(f) \sin(f) df d\phi = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(f) \sin(f) df \quad (C.4)$$

se obtiene:

$$W^s(P, S) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 [u_p C + u_s D + u_s E]^2 \quad (C.5)$$

Por lo tanto, se tiene dos ecuaciones, (B.5) y (C.5), con dos incógnitas, u_p y u_s , de lo cual se puede evaluar la razón de energía de las ondas incidentes S a P como:

$$\bar{R} \equiv \frac{\epsilon_{inc}^s}{\epsilon_{inc}^p} = \frac{u_s^2}{u_p^2} = \left(\frac{A\sqrt{W^s} - C\sqrt{W^p}}{(D + E)\sqrt{W^p} - B\sqrt{W^s}} \right)^2 \quad (C.6)$$

Los valores de A , B , C , D y E se pueden obtener a través de integración numérica.