



Universidad de Concepción
Departamento de Geofísica

DINÁMICA DE DISLOCACIONES COMO FUENTE SÍSMICA

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL
DE GEOFÍSICO

por

Roberto F. Benavente Bravo

Profesor Guía:

Dr. Klaus D. Bataille Bollweg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Geofísica
Concepción, Chile.
Primer semestre, 2009

Dedicado a mi familia

Resumen

En este trabajo se estudiará el caso en el que una dislocación helicoidal sometida a estímulos externos pueda cambiar su intensidad en función de ellos. A pesar de que las ecuaciones de movimiento de una dislocación fueron encontradas, en ese trabajo no se considera la posibilidad de que el vector de Burgers de la dislocación pueda variar como producto del campo de desplazamientos externo. A pesar de que se exponen dos métodos equivalentes para llegar a dichas ecuaciones, el método basado en el principio variacional es mucho menos costoso desde el punto de vista algebraico, por lo que nos basamos en él, incluyendo ahora al vector de Burgers de la dislocación como una coordenada generalizada más del sistema. Para esto también fue necesario agregar un término más a las relaciones para las variaciones espacio-temporales del desplazamiento generado por una dislocación, puesto que también había sido calculado considerando el vector de Burgers constante. Con la aparición de estos términos ahora las ecuaciones resultantes no son sólo función de la posición de la dislocación, si no también del campo externo evaluado en el plano de deslizamiento.

Desde un punto de vista sísmico, la idea de considerar que la magnitud de la dislocación puede variar en el tiempo, como función de tensiones externas, es de suma importancia para el estudio de la fuente. Nuestra motivación viene dada por la construcción de un modelo de fuente en el que muchas dislocaciones interactúen para, dado un umbral de carga, desencadenar el sismo. Sin embargo, la interacción entre dislocaciones está directamente relacionada con el sus vectores de Burgers, de modo que el impacto de las cargas externas sobre éstos condicionarán el comportamiento del sistema.

A pesar de que nuestro estudio se centra en la dinámica de una dislocación, ésta puede ser vista como el borde de una falla, caracterizado por su vector de Burgers. Los desplazamientos de la dislocación en sentidos paralelos al plano de deslizamiento constituyen aumento o disminución del área de discontinuidad, de modo que las ecuaciones obtenidas son de igual forma relevantes en el estudio de la fuente. El problema completo consta de un set de tres ecuaciones acopladas no lineales, que relacionan los desplazamientos de la dislocación, el vector de Burgers y las derivadas temporales de ambos. El hecho de incluir el vector de Burgers como una coordenada más del sistema da cuenta de una ecuación completamente nueva, en la que aparece una relación del vector de Burgers como oscilador armónico forzado por términos que dependen de la carga externa.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | I |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Dislocaciones en medios elásticos | 7 |
| 2.1. Definiciones y conceptos básicos sobre dislocaciones en medios elásticos | 7 |
| 2.2. Principio variacional para un medio elástico | 11 |
| 3. Campos externos sobre una dislocación: Caso dinámico | 15 |
| 3.1. Las relaciones de Mura | 15 |
| 3.2. Ecuación dinámica para una dislocación helicoidal: Caso sísmico | 20 |
| 4. Discusión y Conclusiones | 31 |
| A. | 33 |
| Bibliografía | 35 |
| Agradecimientos | 37 |

Capítulo 1

Introducción

Los terremotos son fenómenos naturales que presentan un gran impacto en la vida humana, tanto en lo social como en lo económico, además de ser de un gran interés científico, pues es posible, por ejemplo, comprender más acerca de la estructura interna de la Tierra gracias a ellos. Por lo anterior se ha hecho necesario estudiar e intentar comprender la dinámica de los sismos y de fenómenos asociados a ellos además de tener la claridad de cómo se producen.

La visión actual de los terremotos tiene unos 100 años, sobre la que se han construido diversas teorías de las que mencionaremos algunas, se basa en la idea de que los terremotos se originan por la liberación abrupta de energía elástica almacenada en ciertas zonas de la litosfera. El primer estudio en que se mostró, de manera esquemática, que un terremoto podía ser visto de este modo corresponde a Reid (1910) [5], en el marco de un estudio del terremoto de San Francisco de 1906. Uno de los casos más importantes, sobre todo en nuestro país, en los que se puede ilustrar esta idea se tiene cuando los esfuerzos acumulados en la litosfera tienen su origen en el continuo desplazamiento de las porciones de ésta, llamadas placas tectónicas, sobre la astenósfera y que da origen a zonas (llamadas zonas de subducción) en donde una placa se dobla, introduciéndose bajo la otra, como muestra la Figura 1.1. Como, en general, la velocidad con que se desplazan las placas es constante podemos pensar que en la zona de subducción se acumularán paulatinamente esfuerzos que, según este modelo de sismos, caerán súbitamente en un terremoto.

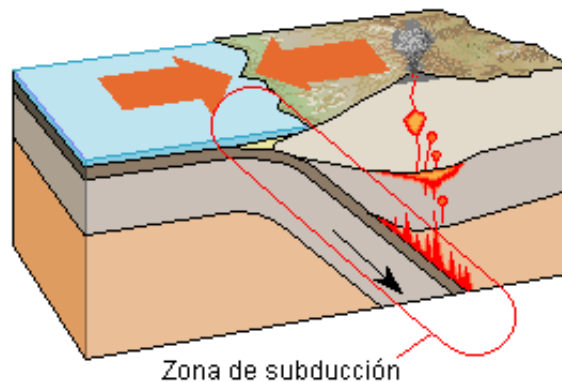


Figura 1.1: Esquema típico de subducción.

Posteriormente fueron surgiendo modelos de la cinemática y la dinámica de la ruptura sísmica. En los primeros se trata de describir una propagación de una discontinuidad en el desplazamiento, llamada

dislocación, a través de una falla preexistente y aparecieron después de varios intentos formulados de manera adecuada en los años 60 en varias investigaciones independientes [6], [7] y [8]. En el caso de los modelos dinámicos el principal objetivo es lograr describir la cinemática de la ruptura partiendo de un estado dado de esfuerzos en la falla. Los primeros intentos importantes por lograr una descripción dinámica de la fuente sísmica corresponden a Kostrov [9], [10] y [11], quien expuso este problema de manera análoga al caso de la fractura de un metal. Aquí, si bien se encuentra consistencia con el modelo de Reid de manera que el esfuerzo cae cuando aparece un frente de ruptura, se tiene el problema de que, tal como ocurre en un sólido cristalino, una vez iniciada la ruptura no es posible describir su detención usando esta descripción.

Una exposición más completa de modelos de la fuente sísmica y discusiones acerca de ellos se puede encontrar en [12].

En general la dinámica de los terremotos es algo sumamente complejo de tratar dado que tiene muchas aristas a describir adecuadamente. Lo que es indispensable de considerar, como es expuesto en [12], para un modelado adecuado de la fuente sísmica, es el proceso completo de carga elástica de la falla, el proceso de fractura y la interacción entre fallas. Esto es algo bastante complicado de cumplir dado el enorme rango de escalas temporales y espaciales que es debido abarcar para cubrir estas características en su totalidad. Por ejemplo, en el caso temporal, es claro que las escalas para que se produzca la carga (que puede variar desde décadas hasta cientos de años) difieren en varios órdenes de magnitud de las que se requieren para describir la cinemática del proceso de ruptura (del orden de segundos). Igualmente en el caso espacial las escalas del frente de ruptura son bastante menores que las adecuadas para describir los estados de esfuerzo globales que determinan el comportamiento de una red de fallas.

Para capturar esta complejidad del fenómeno sísmico se han construido varios modelos. Sin embargo, los métodos numéricos usados no pueden resolver simultáneamente procesos de pequeñas y grandes escalas espaciales. En 1967 Burridge y Knopoff [20] propusieron que un sistema de fallas puede ser modelado por redes de bloques y resortes dando origen a las llamados modelos B-K, de los cuales se han construido muchas variantes. La idea básica de los modelos B-K consiste en un conjunto de bloques conectados a sus vecinos más cercanos mediante resortes como muestra la Figura 1.2.

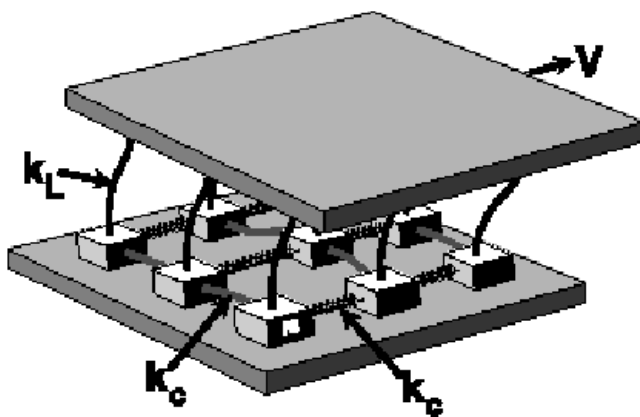


Figura 1.2: Esquema para un modelo B-K de la fuente. k_l y k_c son las constantes elásticas de los resortes y V la velocidad de la placa superior.

Además cada uno de los bloques se encuentra conectado a una placa que se mueve con una velocidad constante. Al resolver el set completo de ecuaciones dinámicas para cada bloque, se obtiene que

aparecen grupos de bloques que se deslizan producto de las interacciones mencionadas. Estos grupos o avalanchas de bloques deslizándose se corresponden con un terremoto en estos modelos. Este tipo de simulaciones es más accesible numéricamente que los casos descritos anteriormente.

En relación con nuestro trabajo han aparecido estudios recientes en los que se encuentran involucrados modelos B-K o derivados de éstos. En [13] se hace una revisión de la física estadística asociada a los modelos B-K y se muestra que los terremotos representados por ellos pueden ser asociados a transiciones de fase del sistema. En [14] se mostró que, usando un método inverso para un modelo de Ising para terremotos descrito en el mismo trabajo, es posible reproducir las características más importantes de una zona de sismicidad. En este caso se usó para el estudio Grecia y sus alrededores.

Sin embargo, es importante notar que se ha demostrado [15] que tanto los modelos B-K como sus derivados pertenecen a los llamados modelos intrínsecamente discretos, es decir que no poseen un límite al continuo, por lo que se les ha criticado, pues no reproducirían la dinámica real de la fuente.

En este contexto hemos pensado si es posible crear un modelo que, siguiendo la teoría elasto-dinámica de la fuente sísmica, pueda reproducir las propiedades estadísticas mencionadas y que los terremotos obedezcan a una transición de fase del sistema. Como un primer acercamiento a esta idea hemos pensado que los terremotos pudiesen resultar de la interacción de un conjunto de muchas dislocaciones con un campo de tensiones externo. La idea subyacente es que el proceso de carga de la fuente quedase dado por un sistema en el que las dislocaciones se encuentren distribuidas aleatoriamente y que de esta manera se obtenga un desplazamiento neto nulo. Para un umbral de tensión externa las dislocaciones se ordenarían (transición de fase) de modo tal que aparecería un desplazamiento macroscópico que daría origen al terremoto. De esta manera el conjunto total de dislocaciones aportaría al desplazamiento total de la falla en presencia de las tensiones externas. Dichas tensiones pueden deberse a diversos fenómenos de la litosfera, como por ejemplo la subducción anteriormente descrita.

De lograrse construir un modelo de estas características obtendríamos una descripción sólida del proceso que da origen a los terremotos, que reuniría características que le darían cierta “ventaja” sobre otros modelos. En particular nos dará una visión completamente elastodinámica de la ocurrencia de un terremoto, sin tener que asociar parámetros aleatorios o estadísticos de manera forzada, como ocurre en algunos modelos B-K.

La elastodinámica es una teoría causal (en el sentido de que no existen variables “aleatorias”), de manera que, a diferencia de los modelos B-K, podríamos tener una visión real del mecanismo que gatilla y origina los terremotos. Por otra lado, la mecánica estadística nos permite introducir el hecho de nuestra imposibilidad de seguir determinísticamente un sistema de muchas dislocaciones de manera que tampoco constituye una modificación sustancial del sistema físico considerado. Podremos encontrar una relación dinámica que determine la ocurrencia de la ruptura como consecuencia de la interacción natural del sistema. Una relación como la anterior nos permitiría, entre otras cosas, calcular el tiempo de carga para que se produzca un terremoto.

Para la construcción de un modelo como el descrito anteriormente hemos pensado en considerar un sistema de muchas dislocaciones preexistentes que sometidas a tensiones externas puedan interactuar de modo que en algún momento se desplacen abruptamente generando la ruptura sísmica. Como es sabido, y veremos en el capítulo 2.1, en una geometría particular conocida como antiplana (SH en sismología) las fuerzas de interacción entre dos dislocaciones serán atractivas si son de signo opuesto y repulsivas si son de igual signo. Dicho signo viene dado por el vector de Burgers, de modo tal que en un sistema con dislocaciones del mismo signo tenderán a alejarse unas de otras. Sin embargo, aunque las ecuaciones de movimiento para una dislocación fueron encontradas [2] aún no ha sido considerado el hecho de que el vector de Burgers pueda cambiar bajo estímulos externos. Es por eso que nos hemos fijado como objetivo para esta tesis encontrar las ecuaciones que describan tanto la variación del vector de Burgers como los desplazamiento de la dislocación bajo un campo de tensiones externas.

Para esto usaremos un principio variacional descrito en la sección 2.2. Además se deberá recalculer las expresiones para las variaciones espacio-temporales del desplazamiento producido por una dislocación para incluir el hecho de que la magnitud de la dislocación pueda variar en el tiempo. Esto está descrito en la sección 3.1. Finalmente el cálculo de las ecuaciones de movimiento se encuentra en la sección 3.2 y un análisis cualitativo de ellas en el capítulo 4.

Capítulo 2

Dislocaciones en medios elásticos

2.1. Definiciones y conceptos básicos sobre dislocaciones en medios elásticos

Usualmente en un medio elástico podemos encontrar defectos que actúan como fuentes de deformación interna. Un caso particular de ellos son las dislocaciones¹ que pueden ser entendidas como una discontinuidad en el vector de desplazamiento del medio \vec{u} , definida en un plano, conocido como plano de deslizamiento; tal que tanto las tensiones y deformaciones generadas sean continuas en el medio. La región del medio que limita la zona donde se manifiesta la discontinuidad corresponde a una línea, conocida como “línea de dislocación”. Es de notar que es usual hacer un abuso de lenguaje y llamar a la línea de dislocación simplemente como dislocación, así por ejemplo al referirnos al “desplazamiento de la dislocación” nos estamos refiriendo en realidad la deformación de esta línea.

Podemos distinguir dos tipos de dislocaciones fundamentales, aunque en realidad usualmente una dislocación es una combinación de ambos. En primer lugar tenemos las dislocaciones helicoidales. Como se ve en la Figura 2.1 la línea de dislocación D es paralela al sentido de la discontinuidad b . Observemos que al rodear la dislocación con sucesivos lazos se obtendrá una hélice, de allí el nombre de este tipo de dislocación.

Otro tipo de dislocaciones son las llamadas dislocaciones de borde. En este caso la línea de la dislocación D es perpendicular a la dirección de la discontinuidad. En la Figura 2.2 podemos apreciar una dislocación de borde. En el caso microscópico puede darse por ejemplo al introducir un semiplano cristalino sobre D .

A pesar de que la geometría de las dislocaciones helicoidales y de borde es bastante diferente, esto sólo se manifiesta en la orientación de la discontinuidad b . De aquí, se puede definir la cantidad vectorial:

$$\oint_L du_i = \oint_L \partial_j u_i dx_j = -b_i, \quad (2.1)$$

como el “vector de Burgers” de la dislocación. Aquí L es un contorno cerrado arbitrario que rodea la dislocación.

Se puede demostrar [16] que una línea de dislocación no puede terminar abruptamente en el medio, debe por tanto, acabar en otra dislocación o defecto, salir del medio, o bien cerrarse sobre sí misma. Es evidente que en este último caso la dislocación generará una superficie S_D sobre la cual

¹Una completa introducción al tema puede verse en [4] y [3].

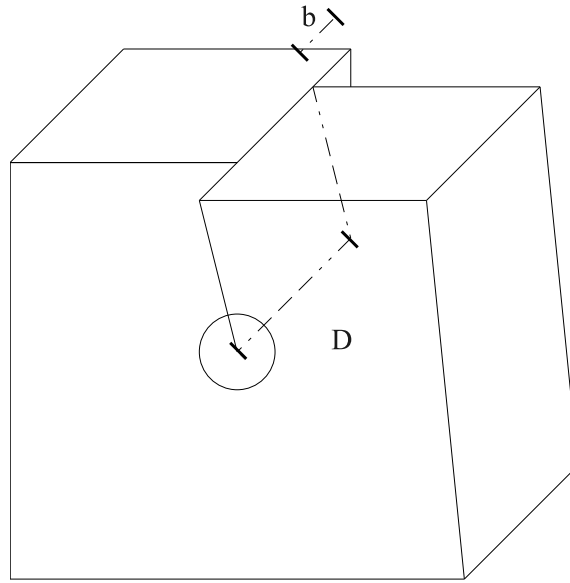


Figura 2.1: Dislocación helicoidal. La discontinuidad b está orientada en la misma dirección que la dislocación D .

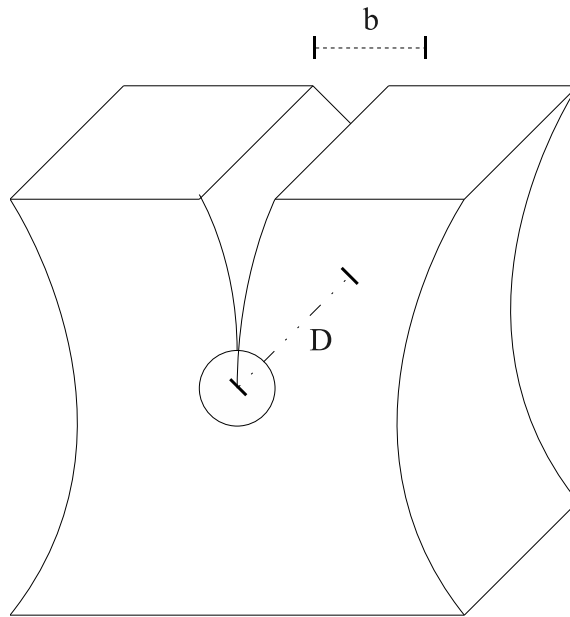


Figura 2.2: Dislocación de borde. La discontinuidad b es perpendicular a la dislocación D .

el desplazamiento \vec{u} experimenta un salto \vec{b} . De esta forma es posible escribir el tensor de deformación e_{ij} como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \frac{1}{2}(n_i b_j + n_j b_i)\delta(\zeta). \quad (2.2)$$

Aquí \hat{n} corresponde al vector normal a S_D y ζ es un parámetro que vale cero sobre la superficie S_D

2.1. DEFINICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE DISLOCACIONES EN MEDIOS ELÁSTICOS 9

y varía sobre la normal de esta superficie. En otras palabras, como por definición D limita la región discontinua de la continua en \vec{u} , la superficie S_D tiene una singularidad u , lo que genera que sobre ella el tensor de deformación tome el valor de 2.2.

Es posible encontrar una expresión general para el desplazamiento \vec{u} producto de la presencia de una dislocación estática. Para esto usaremos la ley de Hooke y la ecuación elastodinámica:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad , \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i^v = 0 \quad , \quad (2.4)$$

donde f_i^v corresponde a fuerzas de volumen aplicadas sobre el medio y σ_{ij} es el tensor de tensiones. La idea aquí es introducir la deformación por dislocación como una fuerza de volumen ficticia, y con la ayuda del tensor de Green del medio encontrar finalmente los desplazamientos. Para esto debemos mencionar que el tensor de Green de un medio se define de modo que:

$$u_i(r_l) = \int G_{ij}(r_l - r'_l) f_j^v(r'_l) dV'. \quad (2.5)$$

Esto es, al integrar las fuerzas actuantes sobre un volumen V' y multiplicarlas por el tensor de Green del medio, obtendremos los desplazamientos deseados. En nuestro caso, por la ecuación elastodinámica y asumiendo un medio homogéneo:

$$f_i^v = -\sigma_{ij,j} = -C_{ijkl} e_{kl,j} \quad (2.6)$$

Luego, usando 2.2 y 2.5, y las propiedades de simetría de C_{ijkl} ($i \leftrightarrow j$, $k \leftrightarrow l$ e $ij \leftrightarrow kl$), la integral quedará evaluada en D producto de la δ , esto es:

$$u_i(\vec{r}) = -C_{jklm} b_m \int_{S_D} dS_l G_{ij,k}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.7)$$

Situando el origen cerca de la dislocación, y a distancias r grandes comparadas con una longitud característica de S_d ($r \gg r'$) tendremos:

$$u_i(\vec{r}) = -C_{jklm} d_{lm} G_{ij,k}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.8)$$

Con $d_{lm} = b_m \int dS_l = b_m S_l$ el tensor de momento de la dislocación. En sismología, al tratar el problema de la fuente, se define el tensor de momento como: $M_{kl} = C_{jklm} b_m \int S_l$. Esto es debido a que las derivadas del tensor de Green $G_{ij,k}$ pueden ser interpretadas como "cuplas" de modo que M_{pq} corresponde a la intensidad de la pq -ésima cupla. Un desarrollo extenso de este tema se puede ver en [17].

Calcularemos ahora la fuerza que actúa sobre una dislocación estática producto de un campo de tensiones externos. Esta fuerza es conocida como la fuerza de Peach-Koehler, en honor a los investigadores que la calcularon [18]. Para ello consideraremos el trabajo por unidad de volumen δR efectuado por las tensiones internas del medio al variar el tensor de deformación una cantidad δe_{ij} . Considerando que la energía elástica del medio es $\sigma_{ij} e_{ij}$, tendremos [4]:

$$\delta R = - \int \sigma_{ik} \delta e_{ik} dV. \quad (2.9)$$

Como δe_{ik} representa el cambio en la deformación producto del desplazamiento de la línea de la dislocación y σ_{ik} representa una carga de tensiones externas supuesta independiente de la posición de

la dislocación podemos sacar δ fuera de la integral. Por otro lado, suponiendo que el sistema está en equilibrio ($\sigma_{ij,j} = 0$) y usando el hecho de que el tensor de tensiones es simétrico tendremos:

$$\delta R = -\delta \int \sigma_{ik} u_{i,k} dV = -\delta \int \partial_i (\sigma_{ik} u_k) dV. \quad (2.10)$$

Podemos usar ahora el teorema de la divergencia para pasar la integral a una integral sobre la superficie de S_D , asumiendo que como condición de borde en el infinito no hay deformación. Como en la línea de la dislocación u_i es discontinuo, podemos tomar un tubo de radio r que la rodee. Sin embargo, puesto que u_i tiende a infinito más lentamente que $1/r$ esta integral se anula. Luego sólo nos quedamos con la integral en S_D :

$$\delta R = -b_k \delta \int_{S_D} \sigma_{ik} dS_i. \quad (2.11)$$

Como δS_i representa la variación de la superficie S_D cuando la dislocación se desplaza una cantidad δr . Así, si dl es un elemento de la línea de la dislocación, tendremos $\delta dS_i = \epsilon_{ijk} \delta r_j dl_k = \epsilon_{ijk} \delta r_j \tau_k dl$. Aquí $\hat{\tau}$ representa un vector tangente a la línea de la dislocación. Luego:

$$\delta R = - \int_L b_k \epsilon_{imn} \sigma_{ik} \tau_n \delta r_m dl. \quad (2.12)$$

De este modo es natural definir la fuerza por unidad de longitud, que actúa sobre la dislocación como:

$$f_i = \epsilon_{ikl} \tau_k \sigma_{lm} b_m. \quad (2.13)$$

Ahora bien, consideremos el campo de desplazamientos producidos por una dislocación helicoidal. Como vemos en la Figura 2.1 este tipo de dislocaciones obedece a la geometría antiplana. Esto es, si ubicamos el eje z a lo largo de la línea de dislocación y paralelo al vector de Burgers, el desplazamiento \vec{u} será de la forma $\vec{u} = (0, 0, u_z(x, y))$. De modo que por simplicidad llamaremos $u = u_z$. Lógicamente también se tendrá $\vec{b} = (0, 0, b)$. Usando 2.1 se tendrá:

$$u = \frac{b}{2\pi} \theta, \quad (2.14)$$

con θ el ángulo de las coordenadas cilíndricas. Para un medio lineal, tendremos que las únicas componentes de los tensores de esfuerzo y deformación no nulas son:

$$e_{z\theta} = \frac{b}{4\pi r}; \quad \sigma_{z\theta} = \frac{\mu b}{2\pi r}, \quad (2.15)$$

con μ la rigidez del medio. Así, usando la ecuación 2.13, podemos encontrar que la fuerza de interacción entre dos dislocaciones helicoidales b_1 y b_2 por unidad de longitud, separadas a una distancia r viene dada por:

$$f = \frac{\mu b_1 b_2}{2\pi r} \quad (2.16)$$

en la dirección radial. Es de notar que al igual que las cargas eléctricas, dislocaciones del mismo signo se atraen y dislocaciones de signo opuesto se repelen.

2.2. Principio variacional para un medio elástico

Según el principio de mínima acción el movimiento en el espacio de fase de un sistema físico coincide con el extremal del funcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L, \quad (2.17)$$

llamado “acción”. L se conoce como el lagrangiano del sistema y corresponde a la diferencia entre la energía cinética T del sistema y la potencial V . Así, extremando la acción, es posible encontrar las ecuaciones de movimiento en el espacio de fase de un sistema. Si el sistema es descrito por coordenadas independientes, la variación de cada una debe ser igual a cero independientemente al extremar la acción.

La idea es encontrar el lagrangiano de un medio elástico para lo cual recurriremos al conocido ejemplo [19] de una barra de dimensiones transversal despreciable y cuyos elementos sólo pueden moverse en direcciones paralelas a ella.

Para comenzar trataremos el problema discreto, es decir modelaremos la barra como compuesta por partículas puntuales masa m situadas a una distancia inicial h de sus vecinos, como muestra la Figura 2.3. Las son desplazadas de sus posiciones iniciales x_i a x'_i . Luego el desplazamiento de cada masa respecto a su posición original es $u_i = x_i - x'_i$.

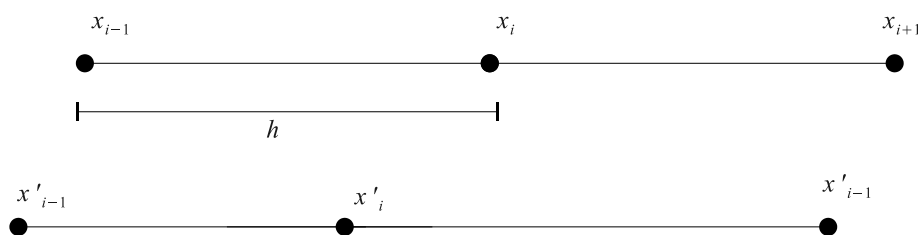


Figura 2.3: Modelo discreto para una barra.

Si asumimos una barra elástica, es decir, en que las interacciones entre las partículas obedecen la ley de Hooke y notando que el alargamiento o acortamiento total entre la i -ésima y la $i + 1$ -ésima partícula es $u_{i+1} - u_i$; tendremos que la energía potencial del sistema es:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (u_{i+1} - u_i)^2, \quad (2.18)$$

mientras que la energía cinética es dada por:

$$T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{u}_i^2. \quad (2.19)$$

Luego, podemos escribir el lagrangiano del sistema como:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{u}_i^2 - k (u_{i+1} - u_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i h \left[\frac{m}{h} \dot{u}_i^2 - kh \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h^2} \right]. \quad (2.20)$$

Antes de hacer el paso al continuo debemos notar que el módulo de Young Y de la barra se define como la constante de proporcionalidad entre la extensión por unidad de longitud y la fuerza que actúa en un punto de ella. Luego usando la ley de Hooke:

$$F = k(u_{i+1} - u_i) = kh \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \Rightarrow Y = kh \quad (2.21)$$

Además, la cantidad m/h corresponde a la densidad lineal de masa ρ . Con estas consideraciones, podemos tomar el límite continuo haciendo $h \rightarrow 0$ y tomando $u_{i+1} - u_i = u(x+h) - u(x)$ llegamos a:

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\rho \dot{u}^2 - Y \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.22)$$

Esta geometría difiere levemente de la antiplana vista en la sección 2.1 en el sentido que acá los desplazamientos son paralelos a la barra. El caso antiplano se asemeja más bien a una cuerda, sin embargo, la forma del lagrangiano es exactamente la misma, sólo que para el segundo caso se considera la rigidez μ en lugar del módulo de Young. Básicamente esto se debe a que la forma de las ecuaciones de onda longitudinales y transversales son las mismas y esa sería la única diferencia entre ambos sistemas.

Capítulo 3

Campos externos sobre una dislocación: Caso dinámico

3.1. Las relaciones de Mura

Como vimos en la sección 2.1 es posible encontrar el campo de desplazamientos producido por una dislocación si conocemos el tensor de Green del medio que la contiene. Ahora queremos abordar el problema de encontrar el campo de desplazamientos producido por una dislocación en movimiento y a partir de él encontrar expresiones para sus derivadas espaciales y temporales. Este problema fue abordado y resuelto por T. Mura en [1], para el caso en que el vector de Burgers \vec{b} es constante en el tiempo. Sin embargo, para poder efectuar los cálculos en la sección 3.2, necesitaremos levantar esta restricción, es decir, considerando además que \vec{b} sea una función del tiempo, lo que supondrá una ligera modificación a las relaciones obtenidas por T. Mura en [1], como mostraremos en esta sección.

Generalizando un poco la definición del tensor de Green de un medio dado en el capítulo anterior diremos que éste corresponde al desplazamiento en la dirección k en una posición \vec{x} y tiempo t , producido por una fuerza puntual proporcional a $\delta(t - t')$ ejercida en la dirección m en \vec{x}' en un tiempo t' . Esto es:

$$U_k(\vec{x}, t) = G_{km}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') f_m(\vec{x}', t'). \quad (3.1)$$

Aquí, de la ecuación elastodinámica, G_{km} satisface la ecuación de movimiento :

$$C_{ijkl} G_{km,lj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') + \delta_{im} \delta(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \rho \ddot{G}_{im}(\vec{x} - \vec{x}', t - t'), \quad (3.2)$$

con ρ la densidad del medio. En principio haremos la deducción para un cuerpo de extensión infinita e impondremos la condición de borde de que en el infinito (muy lejos de la dislocación) el campo de desplazamientos se anule. Con estas consideraciones comenzaremos el cálculo con la siguiente identidad, obtenida a partir de la simetría de C_{ijkl} :

$$C_{ijkl} U_{k,l}(\vec{x}', t') G_{im,j}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = C_{ijkl} U_{i,j}(\vec{x}', t') G_{km,l}(\vec{x} - \vec{x}', t - t'). \quad (3.3)$$

Si integramos por partes la identidad 3.3, en todo el volumen y aplicamos el teorema de la divergencia tendremos:

$$\int dV' C_{ijkl} U_{k,l}(\vec{x}', t') G_{im,j}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \int dV' C_{ijkl} U_{i,j}(\vec{x}', t') G_{km,l}(\vec{x} - \vec{x}', t - t'),$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int dV' \frac{\partial}{\partial x'_j} [C_{ijkl} U_{k,l} G_{im}] - \int dV' C_{ijkl} U_{k,lj} G_{im} \\
&= \int dV' \frac{\partial}{\partial x'_j} [C_{ijkl} U_i G_{km,l}] + \int dV' C_{ijkl} U_i G_{km,lj} \\
&\Rightarrow \int dS'_j C_{ijkl} U_{k,l} G_{im} - \int dV' C_{ijkl} U_{k,lj} G_{im} \\
&= \int dS'_j C_{ijkl} U_i G_{km,l} + \int dV' C_{ijkl} U_i G_{km,lj}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Como $U_{i,k}(\vec{x}') = \frac{\partial U_i}{\partial x'_k}$ y $G_{ij,k} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial (x_k - x'_k)}$ hemos usado el hecho de que $\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k} = -\frac{\partial G_{ij}}{\partial x'_k}$ para que exista consistencia en los índices en las expresiones de arriba.

Es importante notar que en la ecuación 3.4 los términos que involucran integrales de superficie en principio están evaluados en la frontera de todo el volumen del espacio, que sería una superficie en el infinito más la superficie de deslizamiento (que constituye una superficie de discontinuidad en \vec{U}) y por nuestra condición de borde sólo este último término es no nulo.

El tensor de tensiones σ_{ij} que origina un campo de desplazamientos U_k puede ser obtenido mediante $\sigma_{ij} = C_{ijkl} U_{k,l}$. En el caso de la ecuación 3.4 el campo de desplazamientos \vec{U} al que se hace referencia corresponde al campo total del sistema, es decir un campo externo más el originado por la dislocación misma, por lo que el factor $C_{ijkl} U_{k,l}$ presente en el término del lado derecho de 3.4 en principio corresponde a dos campos de tensiones. Sin embargo, como la integral se encuentra evaluada en el plano de deslizamiento y aquí se anula el campo de esfuerzos generado por la dislocación este término se puede reescribir como:

$$- \int F_i(\vec{x}', t') G_{im}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') dS', \tag{3.5}$$

con $F_i = \sigma_{ij} \hat{n}_j$ la fuerza por unidad de superficie ocasionada por las tensiones externas en la superficie de deslizamiento con normal \hat{n} .

Usando la ecuación de la elastodinámica $\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i$ el segundo término del lado derecho de 3.4 queda:

$$\int \rho \ddot{U}_i(x', t') G_{im}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') dV'. \tag{3.6}$$

Como en la superficie de deslizamiento \vec{U} presenta una discontinuidad dada por el vector de Burgers \vec{b} tendremos que el primer término del lado izquierdo de 3.4 es :

$$\int dS'_j C_{ijkl} b_i G_{km,l}(\vec{x} - \vec{x}', t - t'). \tag{3.7}$$

El último término de 3.4 es reescrito despegando la ecuación 3.2 para $C_{ijkl} G_{km,lj}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$, resultando:

$$\int dV' \rho \ddot{G}_{im}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') U_i(x', t') - \int dV' \delta_{im} \delta(\vec{x} - \vec{x}', t - t') U_i(x', t') \tag{3.8}$$

Las integrales en el tiempo van desde $-\infty$ a ∞ , y en ambos extremos tenemos que $\dot{G}_{im} = G_{im} = 0$, de modo que al integrar por partes con respecto a t' en 3.6 y el primer término en 3.8 resulta:

$$\int dt' dV' \rho \dot{U} \dot{G}_{im}, \tag{3.9}$$

de modo que en 3.4 ambos términos se cancelan. Con esta consideración al reemplazar 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 en 3.4, integrando en el tiempo y despejando para el último término en 3.8 resulta:

$$U_m(x, t) = \int dt dS'_j C_{ijkl} b_i G_{km,l}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') + \int dt dS F_i(\vec{x}', t') G_{im}(\vec{x} - \vec{x}', t - t'). \quad (3.10)$$

Notemos que en la expresión 3.10 existen dos términos, el primero corresponde al campo de desplazamientos generado por la dislocación, que es elásticamente independiente de la fuerza aplicada y el segundo término corresponde a un campo de desplazamientos generado por la fuerza externa actuando en el cuerpo. Para obtener las derivadas temporales y espaciales del campo de desplazamientos producidos por una dislocación consideraremos sólo el primer término en 3.10.

Para obtener la derivada temporal del primer término en 3.10 debemos advertir que en el integrando nada dependen de t salvo $G_{km,l}$, pues la dependencia temporal de b está ligada a t' , al igual que el cambio temporal del plano de deslizamiento. De aquí tendremos:

$$\dot{U}_m(x, t) = \int dt' dS'_j C_{ijkl} b_i \dot{G}_{km,l}. \quad (3.11)$$

La expresión de arriba puede expresarse como la suma de dos términos: Uno que involucra una integral de línea a lo largo de la dislocación y otro que contiene la tasa de variación temporal de b . Para demostrar esto usaremos la siguiente propiedad: Como G_{ij} se anula en $t' = \pm\infty$, es evidente que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt'} \left[\int dS'_j C_{ijkl} G_{km,l} b_i \right] dt' \quad (3.12)$$

se anula. Luego, desarrollando la expresión de arriba se tendrá:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt'} \left[\int dS'_j C_{ijkl} G_{km,l} b_i \right] dt' &= \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} G_{km,l} \dot{b}_i dt' \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} \dot{G}_{km,l} b_i dt' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} G_{km,l} \dot{b}_i dt' = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

de donde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} \dot{G}_{km,l} b_i dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} G_{km,l} \dot{b}_i dt' + \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} G_{km,l} b_i dt'. \quad (3.14)$$

En la expresión el segundo término del lado derecho involucra una integración en dS'_i . Este elemento diferencial corresponde físicamente al cambio dS'_i que experimenta la superficie de deslizamiento en un tiempo dt' , producto del movimiento de la dislocación. Por esta razón puede ser rescrito como $dS'_i = \epsilon_{ijk} V_j dl'_k$, donde $V_j = \frac{dr_j}{dt'}$ corresponde a la velocidad con se mueve la dislocación y dl'_k es el elemento de línea de la dislocación. Esta relación está basada en el hecho de que la norma del producto cruz entre 2 vectores es el área que ellos subtienden. Usando este resultado la expresión de arriba se puede reescribir como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} \dot{G}_{km,l} b_i dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j C_{ijkl} G_{km,l} \dot{b}_i dt' + \int_{-\infty}^{\infty} \int dl'_h \epsilon_{jnh} V_n C_{ijkl} G_{km,l} b_i dt'. \quad (3.15)$$

Reemplazando la expresión 3.15 en 3.11 llegamos a:

$$\dot{U}_m(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_j dt' C_{ijkl} G_{km,l} \dot{b}_i + \int_{-\infty}^{\infty} \int dl'_h dt' \epsilon_{jnh} V_n C_{ijkl} G_{km,l} b_i. \quad (3.16)$$

Como es lógico, si el vector de Burgers es contante este resultado se reduce a la relación obtenida por Mura en [1].

Ahora debemos obtener una ecuación para la derivada espacial de los desplazamientos. De manera análoga al caso anterior consideraremos sólo los desplazamientos producidos por la dislocación. Así, la derivada espacial con respecto a x_n del primer término en 3.10 nos da:

$$U_{m,n} = \int dt dS'_j C_{ijkl} b_i G_{km,ln}(\vec{x} - \vec{x}', t - t'). \quad (3.17)$$

Podemos separar la expresión anterior en dos términos que involucren integrales de línea a lo largo de la dislocación y otro que contenga la tasa de variación temporal de \vec{b} . En efecto:

$$\begin{aligned} U_{m,n} &= \int dt' dS'_j C_{ijkl} b_i G_{km,ln}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt'} \left[\int dS'_n \rho \dot{G}_{im} b_i \right] dt' \\ &= \int dt' dS'_j C_{ijkl} b_i G_{km,ln} + \int d\dot{S}'_n dt' \rho \dot{G}_{im} b_i - \int dS'_n dt' \rho \ddot{G}_{im} b_i + \int dS'_n dt' \rho \dot{G}_{im} \dot{b}_i \end{aligned}$$

Pero el tercer término en la expresión de arriba puede ser transformado usando 3.2. Como la delta de Dirac es tridimensional en esa ecuación se anula ser evaluada en una superficie. Además, el término que involucra una integral en $d\dot{S}$ puede ser rescrito como una integral a lo largo de la dislocación según lo expuesto al encontrar la expresión para \dot{U} . Luego:

$$\begin{aligned} U_{m,n} &= \int dt' dS'_j C_{ijkl} b_i G_{km,ln} + \int \epsilon_{nlh} dl'_h dt' V_l \rho \dot{G}_{im} b_i - \int dS'_n dt' C_{ijkl} G_{km,lj} b_i \\ &\quad + \int dS'_n dt' \rho \dot{G}_{im} \dot{b}_i \\ &= (\delta_{pj} \delta_{qn} - \delta_{pn} \delta_{qj}) \int dS'_p dt' C_{ijkl} G_{km,lq} b_i + \int \epsilon_{nlh} dl'_h dt' V_l \rho \dot{G}_{im} b_i + \int dS'_n dt' \rho \dot{G}_{im} \dot{b}_i \\ &= (-\epsilon_{pqh} \epsilon_{njh}) \int dS'_p dt' C_{ijkl} G_{km,lq} b_i + \int \epsilon_{nlh} dl'_h dt' V_l \rho \dot{G}_{im} b_i + \int dS'_n dt' \rho \dot{G}_{im} \dot{b}_i. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Stokes al primer término de la última expresión (cambiaremos el elemento de integración según $-\epsilon_{pqh} dS'_p \frac{\partial}{\partial x'_q} \rightarrow dl'_h$) resulta :

$$U_{m,n} = \epsilon_{njh} \int dl'_h dt' C_{ijkl} G_{km,l} b_i + \epsilon_{nlh} \int dl'_h dt' V_l \rho \dot{G}_{im} b_i + \int dS'_n dt' \rho \dot{G}_{im} \dot{b}_i. \quad (3.18)$$

Nuevamente observamos que para el caso de que \vec{b} no varíe en el tiempo el resultado se reduce al obtenido en [1].

Las ecuaciones 3.16 y 3.18 constituyen nuestras relaciones para las variaciones temporales y espaciales del campo de desplazamientos producido por una dislocación en el caso de que la magnitud de la misma no necesariamente sea constante. Con ellas podremos calcular las ecuaciones de movimiento de una dislocación para un caso más realista desde es punto de vista sísmico. Este procedimiento es descrito en la sección 3.2.

Asumiendo un medio isotrópico, donde $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, las ecuaciones 3.18 y 3.16 pueden ser rescritas en el caso antiplano, para una dislocación helicoidal orientada en el eje z . En efecto, como \vec{U} , \vec{b} , \vec{dl} son paralelos al eje z y la geometría sólo admite fuerzas orientadas en esta dirección, de 3.1 tendremos que sólo G_{zz} es no nula. Además, tanto G_{zz} como \vec{U} no dependen de z . Con estas consideraciones 3.16 queda:

$$\dot{U}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_l dt' \mu G_{,l} \dot{b} + \int_{-\infty}^{\infty} \int dl' dt' \epsilon_{3jn} \mu V_n G_{,j} b. \quad (3.19)$$

Mientras que 3.18 resulta:

$$U_{,n} = \epsilon_{3nj} \int dl' dt' \mu G_{,j} b + \epsilon_{3nl} \int dl' dt' V_l \rho \dot{G} b + \int dS'_n dt' \rho \dot{G} b. \quad (3.20)$$

De este modo, introduciendo la notación indicial 2-dimensional; esto es : $a, b, c, \dots = 1, 2$ y $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$, se tendrá que las ecuaciones de Mura para el caso antiplano son dadas por:

$$\dot{U}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int dS'_a dt' \mu G_{,a} \dot{b} + \int_{-\infty}^{\infty} \int dl' dt' \epsilon_{ab} \mu V_b G_{,a} b, \quad (3.21)$$

$$U_{,a} = \epsilon_{ab} \int dl' dt' \mu G_{,b} b + \epsilon_{ac} \int dl' dt' V_c \rho \dot{G} b + \int dS'_a dt' \rho \dot{G} b. \quad (3.22)$$

Este resultado nos será útil en la sección 3.2, en donde generalizaremos las ecuaciones de movimiento para una dislocación mediante el postulado de que su intensidad puede variar como una función del tiempo y forzada por tensiones externas.

3.2. Ecuación dinámica para una dislocación helicoidal: Caso sísmico

El problema de encontrar las ecuaciones dinámicas para una dislocación bajo un campo de tensiones externo fue abordado y resuelto por F. Lund en 1988 [2]. En ese trabajo se obtienen ecuaciones de movimiento para una dislocación helicoidal en el caso antiplano (además de las ecuaciones para el caso general 3-dimensional) usando dos métodos: La conservación del momentum y la energía, y el principio variacional. A pesar de ser físicamente equivalentes, el segundo método es considerablemente menos laborioso, desde el punto de vista algebraico, de modo que todos nuestros cálculos estarán basados en él.

Como es discutido por R. Madariaga ([12], cap. 4) la caída de esfuerzos al interior de una falla dependerá en general de la variación temporal del vector de Burgers, puesto que las ondas son irradiadas desde la dislocación cuando haya un cambio en el estado de formación, y en el caso en que el medio a considerar sea la Tierra sólida no existe, en principio, ninguna limitación en que la magnitud de la dislocación, dada por el vector de Burgers, pueda variar. Esto contrasta con el caso en que la dislocación se encuentre en un sólido cristalino, que es discutido por ejemplo en [3]. Aquí, por la naturaleza misma de la dislocaciones, el vector de Burgers estará ligado a la estructura de la red, que en principio, se puede considerar que no será alterada por estímulos externos. El caso considerado en [2] supone que el vector de Burgers no varía en el tiempo y por tanto no depende del estímulo externo, lo que es perfectamente válido en las condiciones señaladas anteriormente.

Consideraremos entonces, una ligera modificación en la deducción de las ecuaciones de movimiento de una dislocación, de modo que la magnitud de la misma sea una variable más del sistema. Siguiendo la misma idea que en [2], usaremos un principio variacional: Los desplazamientos u en un medio elástico homogéneo e isótropo, en el caso antiplano, deben extremar la acción S :

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \mu (\nabla u)^2 \right]. \quad (3.23)$$

Aquí ρ corresponde a la densidad del medio y μ es su rigidez. Notemos que la acción debe extremarse al variar una cantidad δu el desplazamiento u . Para comenzar el cálculo consideraremos en 3.23 la siguiente sustitución $u \rightarrow U + u$ que quiere decir que consideraremos que el campo de deformación total en el medio corresponde a una superposición de un desplazamiento U producido por una tensión externa con otro u producido por la dislocación. Ahora tendremos tres términos al lado derecho de 3.23. S_m denotará el término que contenga desplazamientos externos y propios de la dislocación mezclados, S_s denota el término que contiene sólo desplazamientos propios de la dislocación y S_e denota el término que contiene sólo desplazamientos externos. Así, se sigue de 3.23 que:

$$S_m = \int dt d^3x \left[\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \mu \nabla \cdot (u \nabla U) \right]. \quad (3.24)$$

Aquí se ha usado el hecho de que U debe satisfacer la ecuación de onda:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 U = 0, \quad (3.25)$$

que es la ecuación de movimiento resultante al extremar S_e para variaciones δU de U . Esto equivale a decir que $\delta S_e = 0$ independientemente de S_m y S_s .

Para poder efectuar la integral 3.24, debemos excluir del dominio de integración, que en principio corresponde a todo el espacio, todos los puntos de discontinuidad los cuales son mostrados en la Figura

3.1. Éstos corresponden al plano de deslizamiento (A_2), que por definición es donde u es discontinuo, y la dislocación misma, alrededor de la cual se extiende un tubo delgado que la rodea (A_1). Como A_1 y A_2 son funciones de la posición de la dislocación \vec{X} , no serán superficies contantes y por tanto la acción S dependerá de la posición de la dislocación $\vec{X}(t)$, del vector de Burgers $\vec{b}(t)$ y del desplazamiento externo $U(\vec{x}, t)$.

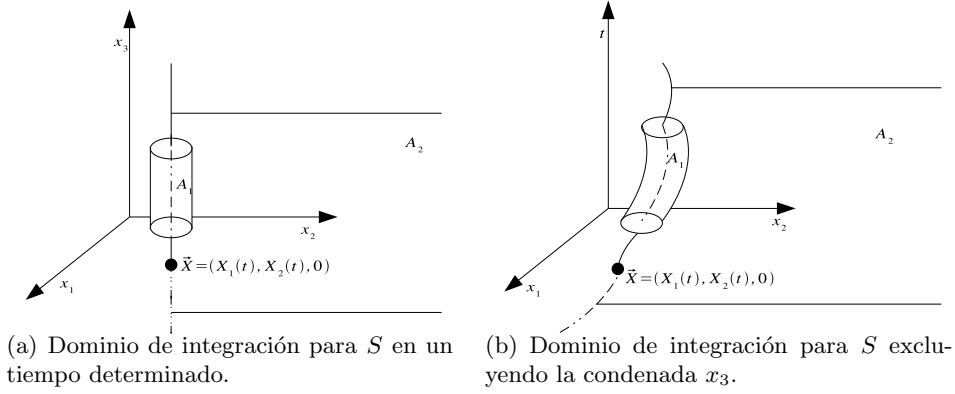


Figura 3.1: Superficies discontinuas en el dominio de integración de S .

Para calcular 3.24 de una forma clara, haremos $S_m = S_m^{(1)} - S_m^{(2)}$. Como hemos dicho, el dominio de integración en 3.24 excluye los puntos de singularidad, de modo que tendremos:

$$S_m^{(1)} = \int_{V^4} dt d^3x \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \int_{V'^4} dt d^3x' \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial U}{\partial t} \right). \quad (3.26)$$

Aquí el volumen V' corresponde al volumen generado al desplazar en un período de tiempo (infinitesimalmente pequeño) δt las superficies de discontinuidad. Esto es: $d^3x' = (dS_i^1 + dS_i^2) V_i \delta t$, donde dS_i^1 y dS_i^2 corresponden a los elementos de A_1 y A_2 respectivamente (Figura 3.1) y V_i es la velocidad con que se desplazaron las superficies en δt , que es en nuestro caso la velocidad de la dislocación $\frac{\partial X_i}{\partial t}$. Con esta consideración, obtendremos

$$\begin{aligned} S_m^{(1)} &= \int_V d^3x \rho u \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int dt \int_{A_1} dS_i^1 V_i \delta t \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ &\quad - \int dt \int_{A_2} dS_i^2 V_i \delta t \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(u \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ &= \int_V d^3x \rho u \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int dt \int_{A_1} dS_i^1 V_i \rho u \frac{\partial U}{\partial t} - \int dt \int_{A_2} dS_i^2 V_i \rho u \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}$$

Asumiendo que la deformación producida externamente U se anula para t_1 y t_2 lo suficientemente lejanos en el pasado y futuro, el primer término en la última expresión se anula. Además, como $\frac{\partial U}{\partial t}$ se ha supuesto continuo en la dislocación misma, al hacer tender a cero el radio del tubo A_1 el segundo término también se anula. Luego, usando el hecho de que en A_2 (plano de deslizamiento) el desplazamiento u sufre una discontinuidad $b = b(t)$, tenemos:

$$S_m^{(1)} = - \int dt b \int_{A_2} dS_i^2 V_i \rho \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (3.27)$$

Ahora bien, para la integral $S_m^{(2)}$ podemos aplicar el teorema de Gauss, y realizar la integral de la superficie que limita al dominio de integración. Nuevamente los puntos singulares son excluidos este dominio, por lo que los límites del volumen de integración serán una superficie en el infinito más A_1 y más A_2 . Observemos que todas estas superficies están conectadas pues el plano de deslizamiento se extiende desde la dislocación hasta el infinito. De esta forma $S_m^{(2)}$ queda:

$$\begin{aligned} S_m^{(2)} &= \int dt d^3x \mu \nabla \cdot (u \nabla U) \\ &= \int dt \int_{A_\infty} dS_i \mu u \partial_i U + \int dt \int_{A_1} dS_i^1 \mu u \partial_i U + \int dt \int_{A_2} dS_i^2 \mu u \partial_i U. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si suponemos que U se anula a distancias grandes de la dislocación, el primer término de la última expresión se anula. Además, como suponemos que ∇U no es singular en la dislocación misma, análogamente al caso anterior, al hacer tender el radio de A_1 a cero el segundo término se anula. Considerando nuevamente que u tiene una discontinuidad b en A_2 tendremos:

$$S_m^{(2)} = \int dt b \int_{A_2} dS_i^2 \mu \partial_i U. \quad (3.29)$$

Por lo que nuestra expresión para S_m quedaría:

$$\begin{aligned} S_m &= S_m^{(1)} - S_m^{(2)} = - \int dt b \int_{A_2} dS_i^2 \left[V_i \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \mu \partial_i U \right] \\ &= -\mu \int dt b \int_{A_2} dS_i^2 \left[V_i \beta^{-2} \frac{\partial U}{\partial t} + \partial_i U \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

con $\beta = \sqrt{(\mu/\rho)}$ la velocidad de las ondas de cizalle (ondas S).

Como se ve en 3.29 para calcular la acción S_m debemos efectuar una integral sobre todo el plano de deslizamiento (A_2). Como se ve en la Figura 3.2 dicha superficie posee un vector normal que se encuentra contenido en el plano x_1 - x_2 , y cuya área puede ser calculada como el producto cruz entre un vector \vec{Y} que va entre la dislocación y el infinito con otro vector L que se extiende a lo largo de la línea de la dislocación.

Para efectuar el cambio de variable, notemos que:

$$dS_i^2 = \epsilon_{ijk} L_j dY_k = \epsilon_{ijk} L_j \frac{\partial Y_k}{\partial \epsilon} d\epsilon.$$

Dado que $\vec{L} = (0, 0, L)$, con L el largo (“infinito”) de la dislocación, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$dS_a^2 = L \epsilon_{ab} \frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon} d\epsilon.$$

Aquí convendremos en que $a, b, c, \dots = 1, 2$ y, como es lo usual, $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$. Además ϵ_{ab} corresponde al tensor totalmente antisimétrico de rango 2, es decir: $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ y $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$. Como ϵ varía entre la dislocación y el infinito, ya que $\vec{Y}(\epsilon = 0, t) = \vec{X}(t)$, la ecuación 3.30 queda:

$$S_m = -\mu L \int b dt \int_0^\infty d\epsilon \epsilon_{ab} \frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad (3.31)$$

Procederemos ahora a extremar la acción mezclada con respecto a variaciones δb de b y δY_a de Y_a . De la ecuación 3.31 es claro que δS_m tendrá la forma:

$$\delta S_m = -\mu L [S_m^{(a)}(\delta b) + S_m^{(b)}(\delta \vec{Y})], \quad (3.32)$$

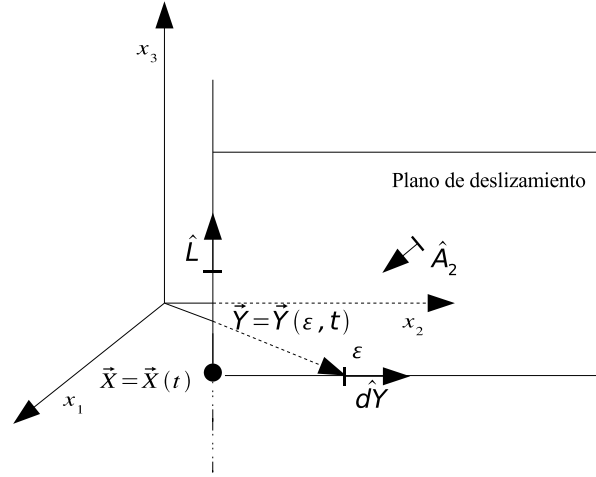


Figura 3.2: Descomposición del plano de deslizamiento para la integración de la ecuación 3.30. Aquí ϵ es un parámetro que varía entre la dislocación y el infinito

con $S_m^{(a)}$ dado por:

$$\begin{aligned}
 S_m^{(a)} &= \int \delta b dt \int_0^\infty d\epsilon \epsilon_{ab} \frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\
 &= \int \delta b dt \int_0^\infty d\epsilon \epsilon_{ab} \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} Y_b \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right. \\
 &\quad \left. - Y_b \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right] \\
 &= \int \delta b dt \epsilon_{ab} \left[X_b \left(\partial_a U(\vec{X}(t)) + \beta^{-2} \frac{\partial X_a}{\partial t} \frac{\partial U(\vec{X}(t))}{\partial t} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty d\epsilon Y_b \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right]. \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Aquí se ha usado el hecho que el campo externo U se anula en el infinito.

Para llevar a cabo el cálculo de $S_m^{(b)}$ usaremos el hecho que como en el dominio de integración $\vec{x} = \vec{Y}$, para cualquier función f evaluada en el dominio \vec{Y} se satisface que:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ab} \left[\frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon} \delta f_a - \delta Y_b \frac{\partial}{\partial \epsilon} f_a \right] &= \epsilon_{ab} \left[\frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon} \frac{\partial f_a}{\partial Y_c} \delta Y_c - \delta Y_b \frac{\partial f_a}{\partial Y_c} \frac{\partial Y_c}{\partial \epsilon} \right] \\
 &= \epsilon_{cb} \frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon} \frac{\partial f_c}{\partial Y_a} \delta Y_a - \epsilon_{cb} \delta Y_b \frac{\partial f_c}{\partial Y_a} \frac{\partial Y_a}{\partial \epsilon} \\
 &= \epsilon_{ca} \frac{\partial Y_a}{\partial \epsilon} \frac{\partial f_c}{\partial Y_b} \delta Y_b - \epsilon_{cb} \delta Y_b \frac{\partial f_c}{\partial Y_a} \frac{\partial Y_a}{\partial \epsilon},
 \end{aligned}$$

y como cualquier vector bidimensional satisface que $\epsilon_{ab} A_c = \epsilon_{cb} A_a - \epsilon_{ca} A_b$, y en nuestro caso $-\epsilon_{ab} \partial_c = \epsilon_{ca} \partial_b - \epsilon_{cb} \partial_a$, la expresión de arriba queda:

$$\epsilon_{ab} \left[\frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon} \delta f_a - \delta Y_b \frac{\partial}{\partial \epsilon} f_a \right] = \epsilon_{ab} \delta Y_a \partial_c f_c \frac{\partial Y_b}{\partial \epsilon}. \tag{3.34}$$

Calculando ahora $S_m^{(b)}$ tendremos que :

$$\begin{aligned}
S_m^{(b)} &= \int b dt \int_0^\infty d\varepsilon \epsilon_{ab} \delta \left\{ \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right\} \\
&= \int b dt \int_0^\infty d\varepsilon \epsilon_{ab} \left\{ \frac{\partial \delta Y_b}{\partial \varepsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right\} \\
&= \int b dt \int_0^\infty d\varepsilon \epsilon_{ab} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta Y_b \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \delta Y_b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right\} \\
&= \int b dt \int_0^\infty d\varepsilon \epsilon_{ab} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta Y_b \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \beta^{-2} \left[\frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta \left(\frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \delta Y_b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta \partial_a U - \delta Y_b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \partial_a U \right\}.
\end{aligned}$$

Si usamos la ecuación 3.34 en la tercera línea de la última expresión, y sumando y restando el término $\frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta Y_a \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, podemos llegar a:

$$\begin{aligned}
S_m^{(b)} &= \int b dt \int_0^\infty d\varepsilon \epsilon_{ab} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta Y_b \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \beta^{-2} \left[\frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} + \delta Y_a \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial Y_b}{\partial t} \right] + \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta Y_a \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta Y_a \nabla^2 U - \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta Y_a \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right\} \\
&= \int b dt \int_0^\infty d\varepsilon \epsilon_{ab} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \delta Y_b \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \beta^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta Y_a \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial Y_b}{\partial \varepsilon} \delta Y_a \left(\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \nabla^2 U \right) \right\}
\end{aligned}$$

La segunda línea en esta expresión se anula, pues la variación de las coordenadas $\delta \vec{Y}$ es nula en los extremos t_1 y t_2 . La tercera línea también es igual a cero, puesto que el campo externo debe ser solución de la ecuación de onda en el medio elástico, según supusimos. De esta manera sólo la integral de la primera línea es distinta de cero. Esta expresión queda evaluada en los extremos de ε que corresponden al infinito y a la dislocación. Como en el infinito U es supuesto nulo, tendremos que:

$$S_m^{(b)} = \int b dt \epsilon_{ab} \delta X_b \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial X_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right). \quad (3.35)$$

Y ahora usando las ecuaciones 3.32, 3.33 y 3.35, podemos escribir la variación de la acción mezclada como:

$$\begin{aligned} \delta S_m = & -\mu L \left\{ \int \delta b dt \epsilon_{ab} \left[X_b \left(\partial_a U(\vec{X}(t)) + \beta^{-2} \frac{\partial X_a}{\partial t} \frac{\partial U(\vec{X}(t))}{\partial t} \right) - \int_0^\infty d\varepsilon Y_b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial Y_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right] \right. \\ & \left. + \int b dt \epsilon_{ab} \delta X_b \left(\partial_a U + \beta^{-2} \frac{\partial X_a}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

De esta última expresión se ve que ahora la acción mezclada depende, al contrario del caso en que b es contante, de una integral realizada en el plano de deslizamiento. Esto se puede explicar bajo el siguiente argumento: Si b es una variable más del sistema que se encuentra definida en el plano de deslizamiento, su variación dependerá del campo U en dicho plano, además de afectar al movimiento mismo de la dislocación. Aquí debemos notar que, como se puede seguir del cálculo, en los términos que no involucran integrales sobre ε (plano de deslizamiento) el campo U se encuentra evaluado en la dislocación \vec{X} .

Veremos ahora que ocurre con la acción S_s que contiene sólo términos del desplazamiento generado por la dislocación. Esta es dada por:

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{\mu}{2} \int dt d^3x \left[\beta^{-2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - (\nabla u)^2 \right] \\ &= \frac{\mu}{2} \int dt d^3x \left[\beta^{-2} \frac{\partial}{\partial t} u \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (u \nabla u) \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Evidentemente aquí el volumen de integración es el mismo que el descrito para el cálculo de S_m (ver Figura 3.1 y ecuación 3.26). De este modo es directo que al excluir los puntos discontinuos del dominio de integración tendremos, análogamente al caso anterior, que:

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{\mu}{2\beta^2} \int d^3x u \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{\mu}{2} \int dt \int_{A_\infty} dS_i u \nabla u - \frac{\mu}{2} \int dt \int_{A_1} dS_i^1 u \left(\partial_i u + \beta^{-2} V_i \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{\mu}{2} \int b dt \int_{A_2} dS_i^2 \left(\partial_i u + \beta^{-2} V_i \frac{\partial u}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Para este caso debemos pensar en mantener aquellos términos divergentes despreciando los que sean finitos. Al hacer tender el radio del tubo en A_1 a cero y pensando en una dislocación estática en un pasado y futuros lejanos tendremos que todos los términos son finitos salvo la integral en el plano de deslizamiento. Luego:

$$S_s = -\frac{\mu}{2} \int b dt \int_{A_2} dS_i^2 \left(\partial_i u + \beta^{-2} V_i \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (3.38)$$

En este punto debemos recurrir a las ecuaciones 3.21 y 3.22 que se han calculado para \dot{u} y $\partial_a U$. Reemplazando en 3.38 resulta:

$$S_s = I + II, \quad (3.39)$$

con:

$$I = -\frac{\mu}{2} \int b(t) dt \int dS_a \left(\int dS'_a dt' \rho \dot{b}(t') \dot{G} + \frac{V_a}{\beta^2} \mu \int dS'_b dt' \dot{b}(t') \partial_b G \right), \quad (3.40)$$

$$II = -\frac{\mu}{2} \int b(t) dt \int dS_a \left(\epsilon_{ab} \int dl' dt' \mu b(t') \partial_b G + \epsilon_{ac} \int dl' dt' \dot{X}_c \rho b(t') \dot{G} + \frac{V_a}{\beta^2} \epsilon_{cb} \int dt' dl' \mu b(t') \dot{X}_c \partial_b G \right). \quad (3.41)$$

La integral I debe ser efectuada sobre el plano de deslizamiento en un instante t y otro t' . En la Figura 3.1 podemos ver ambas superficies generadas por la dislocación en los tiempos t y t' . Para resolver esta integral efectuamos una integración por partes en t para el primer término y para el segundo, usando el hecho que $dS'_b = \epsilon_{bc} dH'_c dl'$, con \vec{H} un vector que varía entre desde la dislocación y el infinito, por el plano de deslizamiento; es posible usar el teorema de Stokes. Luego se tendrá:

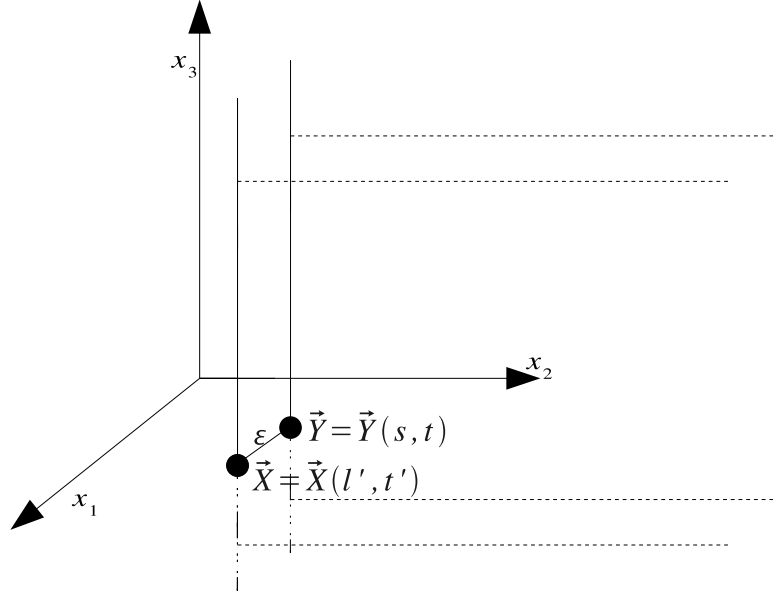


Figura 3.3: Esquema de integración para S_s . La dislocación en un tiempo t se encuentra en una posición $\vec{Y}(s, t) = \vec{X}(l', t') + \vec{\epsilon}$.

$$I = -\frac{\mu}{2} \int dt dS_a \left(- \int dS'_a dt' \rho \dot{b}(t') \dot{b}(t) G + \frac{V_a}{\beta^2} \mu \int dl' dt' \dot{b}(t') b(t) G \right). \quad (3.42)$$

Es importante observar que como el contorno de S' corresponde a la dislocación misma más líneas rectas en el “infinito” (Figura 3.1), de modo que al aplicar el teorema de Stokes la integral queda evaluada en la dislocación. Si hacemos $\Delta s = s - l'$ y $\Delta t = t - t'$, tendremos que:

$$I = -\frac{\mu}{2} \int d(\Delta t) \epsilon_{ac} dH_c d(\Delta s) \left(- \int \epsilon_{ab} dH'_b dl' dt' \rho \dot{b}(t') \dot{b}(t) G + \frac{V_a}{\beta^2} \mu \int dl' dt' \dot{b}(t') b(t) G \right). \quad (3.43)$$

En el apéndice A se encuentran explicados algunos resultados que usaremos en esta parte.

En primer lugar se efectuará la integral de G sobre s y l' . En este caso tendremos que $G = G(\vec{Y}(s, t) - \vec{X}(l', t'), t - t')$. La expresión explícita de G para un medio isótropo antiplano es:

$$G(\vec{x}, t) = \frac{\delta(t - \frac{|\vec{x}|}{\beta})}{4\pi\mu |\vec{x}|} \quad (3.44)$$

Luego, usando la ecuación A.6 y A.7, tendremos:

$$I = -\frac{\rho}{8\pi} \int d(\Delta t) dt' dl' \epsilon_{ac} dH_c d(\Delta s) \left(-\int \epsilon_{ab} dH'_b \dot{b}^2(t') + V_a \dot{b}(t') [b(t') + \dot{b}(t')\Delta t] \right) \frac{\delta(\Delta t - \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{X}^2 \Delta t^2 + \Delta s^2}}{\beta})}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{X}^2 \Delta t^2 + \Delta s^2}}. \quad (3.45)$$

Ahora debemos usar la conocida fórmula:

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (3.46)$$

donde x_i representa el i -ésimo cero de g . En nuestro caso tomaremos este resultado para $x = \Delta t$. Luego:

$$g(\Delta t) = \Delta t - \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{X}^2 \Delta t^2 + \Delta s^2}}{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{\Delta s^2 + \epsilon^2}{\beta^2 + \dot{X}^2}}. \quad (3.47)$$

Aquí tomaremos $\Delta t > 0$. Con el objeto de simplificar los cálculos nos restringiremos al caso en el que la dislocación se mueve muy lentamente en comparación con la velocidad de la onda β . La interpretación física de esto será discutida más adelante, cuando analicemos el caso geofísico al que aplicaremos las ecuaciones obtenidas en esta parte. En esta aproximación el cero positivo de g sería: $\frac{\sqrt{\Delta s^2 + \epsilon^2}}{\beta}$. Además:

$$g \left(\frac{\sqrt{\Delta s^2 + \epsilon^2}}{\beta} \right) = 1 - \frac{\dot{X}^2}{\beta^2} \approx 1. \quad (3.48)$$

Por lo que llegamos a:

$$I = -\frac{\rho}{8\pi} \int d(\Delta t) dt' dl' \epsilon_{ac} dH_c d(\Delta s) \left(-\int \epsilon_{ab} dH'_b \dot{b}^2(t') + V_a \dot{b}(t') [b(t') + \dot{b}(t')\Delta t] \right) \frac{\delta(\Delta t - \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta s^2}}{\beta})}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{X}^2 \Delta t^2 + \Delta s^2}}. \quad (3.49)$$

Ahora, usando la δ efectuaremos la integral en Δt , obteniendo:

$$I = -\frac{\rho}{8\pi} \int dt' dl' \epsilon_{ac} dH_c d(\Delta s) \left(-\int \epsilon_{ab} dH'_b \dot{b}^2(t') + V_a \dot{b}(t') [b(t') + \dot{b}(t')\sqrt{(\Delta s^2 + \epsilon^2)/\beta^2}] \right) \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta s^2}}. \quad (3.50)$$

Para efectuar la integración sobre Δs se usará una aproximación de inducción local, esto es, la dinámica de un punto $\vec{X}(s, t)$ de la dislocación está influenciada sólo por puntos cercanos $\vec{X}(l', t')$, tal que $|s - l'| < \sigma$, con $\lambda_\beta \sim \sigma$; es decir que entre un tiempo t y t' un punto de la dislocación solo puede estar afectado por otros puntos ubicados a una distancia comparable con la longitud de onda λ_β del sistema. De este modo, usando:

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} d(\Delta s) \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta s^2}} = 2 \ln(\Delta s + \sqrt{\epsilon^2 + \Delta s^2}) \Big|_0^{\sigma} = 2 \ln \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (3.51)$$

Aquí hemos usado el hecho de que $\epsilon \ll \sigma$ y redefinido $2\sigma \rightarrow \sigma$ para no sobrecargar la notación. Luego, la integral queda:

$$I = -\frac{\rho L}{4\pi} \int dt' \epsilon_{ac} dH_c \left[\left(-\int \epsilon_{ab} dH'_b \dot{b}^2 + V_a \dot{b} b \right) \ln \frac{\sigma}{\epsilon} + \frac{V_a \dot{b}^2 \sigma}{\beta} \right]. \quad (3.52)$$

Si el plano de deslizamiento se mueve rígidamente con la dislocación, tendremos:

$$I = -\frac{\rho L}{4\pi} \int dt' \epsilon_{ac} H_c \left[\left(-\epsilon_{ab} H'_b \dot{b}^2 + \dot{X}_a \dot{b} b \right) \ln \frac{\sigma}{\epsilon} + \frac{\dot{X}_a \dot{b}^2 \sigma}{\beta} \right]. \quad (3.53)$$

Por lo que finalmente llegamos a:

$$I = -\frac{\rho L}{4\pi} \int dt' \left[\left(-H^2 \dot{b}^2 + \epsilon_{ac} H_c \dot{X}_a \dot{b} b \right) \ln \frac{\sigma}{\epsilon} + \epsilon_{ac} H_c \frac{\dot{X}_a \dot{b}^2 \sigma}{\beta} \right]. \quad (3.54)$$

Haciendo la variación de I , considerando que $\delta(b\dot{b}) = \dot{b} \delta b + b \delta \dot{b} = \dot{b} \delta b - \dot{b} \delta b = 0$, tendremos:

$$\delta I = -\frac{\rho L}{4\pi} \ln \frac{\sigma}{\epsilon} \int dt' \left\{ H^2 2\dot{b} \delta b - \epsilon_{ac} H_c (\ddot{b} b + \dot{b}^2) \delta X_a - \epsilon_{ac} H_c \frac{2\sigma}{\beta} (\delta X_a \dot{b} \ddot{b} + \delta b (\ddot{b} \dot{X}_a + \dot{b} \ddot{X}_a)) \right\}. \quad (3.55)$$

Integraremos II de manera análoga:

$$II = -\frac{\mu}{2} \int dt dS_a \left(\epsilon_{ab} \int dl' dt' \mu b(t) b(t') \partial_b G - \epsilon_{ac} \int dl' dt' \dot{X}_c \rho \dot{b}(t) b(t') G + \frac{V_a}{\beta^2} \epsilon_{cb} \int dt' dl' \mu b(t) b(t') \dot{X}_c \partial_b G \right). \quad (3.56)$$

La contribución del último término es despreciada, pues es proporcional a $\frac{\dot{X}^2}{\beta^2}$.

Con las mismas consideraciones que para el caso anterior podemos aplicar el teorema de Stokes, obteniendo:

$$\begin{aligned} II &= -\frac{\mu}{2} \int dt ds \left(\int dl' dt' \mu b(t) b(t') G - \int dl' dt' dH_c \dot{X}_c \rho \dot{b}(t) b(t') G \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d(\Delta t) d(\Delta s) \left(\int dl' dt' \mu (b + \dot{b} \Delta t) b - \int dl' dt' dH_c \dot{X}_c \rho \dot{b} b \right) \\ &\quad \times \frac{\delta(\Delta t - \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta s^2}}{\beta})}{\sqrt{\epsilon^2 + \dot{X}^2 \Delta t^2 + \Delta s^2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \left(\int dl' dt' \mu (b \ln \frac{\sigma}{\epsilon} + \dot{b} \frac{\sigma}{\beta}) b - H_c \ln \frac{\sigma}{\epsilon} \int dl' dt' \dot{X}_c \rho \dot{b} b \right) \\ &= -\frac{L}{4\pi} \int dt' \left(\mu b^2 \ln \frac{\sigma}{\epsilon} + \mu \dot{b} b \frac{\sigma}{\beta} - H_c \ln \frac{\sigma}{\epsilon} \dot{X}_c \rho \dot{b} b \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Luego, aplicando una variación sobre II queda:

$$\delta II = -\frac{L}{4\pi} \int dt' \left(\mu 2b \delta b \ln \frac{\sigma}{\epsilon} + H_c \ln \frac{\sigma}{\epsilon} \rho (\ddot{b} b + \dot{b}^2) \delta X_c \right). \quad (3.58)$$

Las ecuaciones dinámicas pueden ser obtenidas haciendo $\delta S_m + \delta S_s = 0$ y postulando que b y \vec{X} son coordenadas independientes del sistema. Así, usando las ecuaciones 3.36, 3.55 y 3.58, tendremos:

$$\epsilon_{ab} b \left(\partial_b U + \frac{\dot{X}_b \dot{U}}{\beta^2} \right) = \frac{1}{4\pi \beta^2} \left[\ln \frac{\sigma}{\epsilon} (\ddot{b} b + \dot{b}^2) (\epsilon_{ca} H_c + H_a) + \epsilon_{ca} H_c \frac{2\sigma}{\beta} \dot{b} \ddot{b} \right], \quad (3.59)$$

$$\mu \epsilon_{ab} \left[X_a \left(\partial_b U + \frac{\dot{X}_b \dot{U}}{\beta^2} \right) - \int_0^\infty d\varepsilon Y_b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\partial_a U + \frac{\dot{Y}_a \dot{U}}{\beta^2} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{\sigma}{\epsilon} (\rho H^2 \ddot{b} + \mu b) + \epsilon_{ca} H_c \frac{\sigma}{\beta} (\ddot{b} \dot{X}_a + \dot{b} \ddot{X}_a) \right]. \quad (3.60)$$

Con el objeto de simplificar un poco el set de ecuaciones obtenido, tomaremos el caso particular en que la dislocación sólo realiza un movimiento paralelo al plano de deslizamiento. Esta aproximación no es del todo una mera simplificación del problema, pues tiene un cierto sustento físico. Como hemos tomado el caso en que el plano de deslizamiento se desplaza rígidamente junto con la dislocación, un movimiento perpendicular a éste implicaría desplazar toda la discontinuidad por el medio, lo cual es más costoso desde el punto de vista del trabajo invertido en ello, que hacer un desplazamiento en sentido paralelo a dicho plano. Una breve discusión de esto se puede ver en [4]. Aunque los argumentos para este caso están basados en el caso de dislocaciones microscópicas, es posible establecer la analogía con el caso descrito arriba.

De esta forma llegamos a las ecuaciones:

$$\epsilon_{ab} b \left(\partial_b U + \frac{\dot{X}_b \dot{U}}{\beta^2} \right) = \frac{1}{4\pi \beta^2} \left[\ln \frac{\sigma}{\epsilon} (\ddot{b} b + \dot{b}^2) (\epsilon_{ca} H_c + H_a) + \epsilon_{ca} H_c \frac{2\sigma}{\beta} \dot{b} \ddot{b} \right], \quad (3.61)$$

$$\mu \epsilon_{ab} \left[X_a \frac{\dot{X}_b \dot{U}}{\beta^2} - \int dH_a \partial_b U \right] = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sigma}{\epsilon} (\rho H^2 \ddot{b} + \mu b). \quad (3.62)$$

Como vemos en estas ecuaciones hay una dependencia de la fuente evaluada en el plano de deslizamiento. Esto es porque, según hemos mencionado, el hecho de que b pase a ser una variable hace posible que los desplazamientos externos actúen sobre b , que se encuentra definido en este plano.

Capítulo 4

Discusión y Conclusiones

Hemos obtenido un conjunto de ecuaciones que rigen el comportamiento de un sistema elasto-dinámico dado por una dislocación helicoidal que, producto de una fuente externa de tensiones, puede variar tanto su posición como su intensidad dada por el vector de Burgers. A pesar de que la idea de tener una dislocación cuya intensidad varíe en el tiempo es incompleta para aproximarnos a la comprensión del comportamiento de una falla, puesto que en nuestros cálculos hemos supuesto que la intensidad no varía según la posición (dislocación homogénea); es posible interpretar desde el punto de vista de la fuente sísmica este sistema como el borde de una falla. De este modo, recurriendo al ampliamente usado modelo de falla antiplana; el movimiento de la dislocación representaría un desplazamiento en el frente de ruptura. Cabe mencionar de todos modos que en la aproximación $X^2/\beta^2 \ll 1$ que hemos empleado no sería posible incluir terremotos grandes puesto que en ese caso el frente de ruptura se mueve con velocidad del orden de las ondas S . Sin embargo el estudio de terremotos silenciosos, en los que la ruptura se mueve en a bajas velocidades sí quedarían incluidos en este estudio.

De este modo las ecuaciones 3.61 y 3.62 nos mostrarían cómo es el comportamiento del borde de una falla antiplana con la geometría descrita en la Figura 4.1.

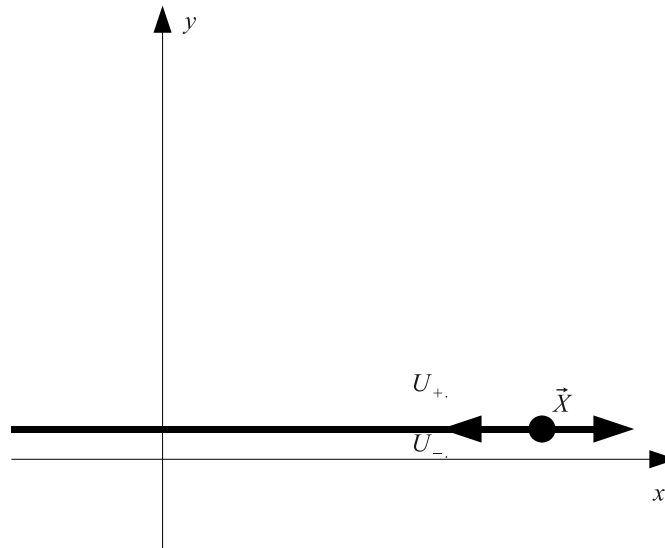


Figura 4.1: Interpretación en la geometría antiplana.

Notemos que, conforme a lo comentado en la obtención de las ecuaciones, los movimientos de la dislocación son obviamente paralelos a la proyección del plano de falla en el plano $x - y$.

Las variaciones tanto en \vec{X} como en b quedan condicionadas por las variaciones temporales y espaciales del campo externo de desplazamientos evaluado en la dislocación y además, como se ve en la ecuación 3.62, en el plano de deslizamiento. Esto último no ocurre para el caso en que b no es una variable más del sistema y le da algo de consistencia a nuestro resultado, pues b se encuentra definido justamente en este plano.

Es muy interesante la información que nos arroja la ecuación 3.62, con respecto a la variación de b , pues tiene la forma de un oscilador armónico forzado para esta variable. Notemos que el forzamiento viene dado por los desplazamientos de la dislocación y por el campo externo. La frecuencia del oscilador es $\omega = \beta/H$, de manera que para fallas grandes comparadas con λ_β las frecuencias de esta oscilación serían bajas comparadas con f_β . Aquí hay dos casos que pudieran resultar sumamente novedosos de estudiar:

- Caso en el que no hay variaciones espacio-temporales de la fuente: Aquí el forzamiento sería nulo, pero de manera poco intuitiva sí podríamos tener variaciones armónicas b . De verificarse esta propiedad se podría extraer información importante de una falla (extensión), conociendo las frecuencias a las que oscila su intensidad.
- Caso en el que el forzamiento produce una resonancia: Esto es otro resultado importante, puesto que si el lado izquierdo en 3.62 oscila a una frecuencia similar que b se produciría un aumento abrupto en la intensidad de la dislocación. Como no conocemos la escala de tiempo en que el sistema entra en resonancia no podemos asociar este resultado a un terremoto, sin embargo, se deberían producir deformaciones muy grandes en el medio si ocurre este tipo de interacción.

Pese a que este estudio se ha limitado a un borde de la falla, la idea inicial de modelar una falla como un conjunto de dislocaciones de este tipo puede ser, al menos por ahora, entendida conceptualmente. Considerando el hecho de que las dislocaciones de igual signo se repelen y de distinto signo se atraen, si el impacto conjunto de la interacción entre dislocaciones y el campo externo permite, por ejemplo, una alineación de los vectores de Burgers, la repulsión entre las dislocaciones haría extender la falla y de esta manera podríamos tener una visión más completa de la fuente. Sin embargo, para esto se debe estudiar de manera más acabada la influencia de las tensiones externas sobre b y cómo interaccionan un conjunto de dislocaciones que compartan el plano de deslizamiento.

Finalmente recordaremos, que este estudio se ha limitado a un medio elástico lineal, homogéneo, isótropo, para movimientos lentos de la dislocación y tomando un plano de deslizamiento que se mueve rígidamente con ella.

Apéndice A

Mostraremos algunas consecuencias de la aproximación $l' \simeq s$ y $t \simeq t'$ usada en la sección 3.2, para el cálculo de S_s . Puesto que en esta parte de la acción debemos efectuar una integral sobre los planos de deslizamiento en t y en t' , supondremos que para un tiempo $\Delta t = t - t'$ estarán a una distancia ϵ . Definimos \vec{Y} como $\vec{Y}(s, t) = \vec{X}(s, t) + \epsilon$, y realizando una expansión en serie para X tendremos:

$$\vec{X}(s, t) = X(l', t') + \dot{X}(l', t')(t - t') + \frac{\partial X(l', t')}{\partial s}(s - l') + \dots \quad (\text{A.1})$$

Desde luego, cortando la serie a primer orden y para $s = l'$, obtendremos:

$$\dot{X}(l', t') = \frac{\vec{X}(l', t) - X(l', t')}{t - t'}. \quad (\text{A.2})$$

Luego, usando la definición de \vec{Y} y el hecho de que $\frac{\partial X}{\partial s} = \hat{z}$, tendremos:

$$\vec{Y}(s, t) - X(l', t') = \dot{X}(l', t')(t - t') + \hat{z}(s - l') + \epsilon. \quad (\text{A.3})$$

Notemos que:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t'}. \quad (\text{A.4})$$

Si tomamos $\vec{\epsilon} \approx \vec{X}(l', t) - \vec{X}(l', t')$ y usando la ecuación A.2 llegamos a:

$$|\vec{Y}(s, t) - X(l', t')| = \sqrt{\epsilon^2 + \dot{X}(l', t')^2 + 2\epsilon^2 + (s - l')^2}. \quad (\text{A.5})$$

Para no sobrecargar la notación haremos $3\epsilon^2 \rightarrow \epsilon^2$. Puesto que ϵ puede ser interpretado como una longitud característica del sistema (muy pequeña, en comparación con el límite de inducción local δ) que representa la contribución del núcleo de la dislocación al movimiento de la misma; podemos hacer esta sustitución sin perder el sentido físico de ϵ . Luego:

$$|\vec{Y}(s, t) - X(l', t')| = \sqrt{\epsilon^2 + \dot{X}(l', t')^2 + (s - l')^2}. \quad (\text{A.6})$$

Por otra parte, haciendo consideraciones similares para $b(t)$ y $b(t')$, obtendremos:

$$b(t) = b(t') + \dot{b}(t')(t - t') + \dots, \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{b}(t) = \dot{b}(t'). \quad (\text{A.8})$$

Bibliografía

- [1] T. Mura, Continuous Distribution of Moving Dislocations, *Philos. Mag.* **8**, 863 (1963).
- [2] F. Lund, Response of a stringlike dislocation loop to an external stress, *J. Mater. Res.* **3**, 280 (1988).
- [3] J. Hirth & J. Lothe, *Theory of dislocations*, John Wiley and Sons Inc. , (1982).
- [4] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Teoría de la Elasticidad*, Ed. Reverté S. A., (1969).
- [5] H. Reid, The mechanics of the earthquake, in: *The California earthquake of April 18, 1906*. (1910).
- [6] Haskell, N. A., Total energy and energy spectral density of the elastic wave radiation from propagating faults, *Bul. Seism. Soc. Am.*, **54**, 1,811-841. (1964).
- [7] Maruyama, T., On the force equivalents of dynamic elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism. *Bul. Earthquake. Res. [nst. Tokyo University. 4]*, 467-486, (1963).
- [8] Burridge R., & L. Knopoff, Body force equivalents for seismic dislocations, *Bul. Seism. Soc. Am.*, **54**. 1,875-1,888. (1964)
- [9] Kostrov, B. V., Self-similar problems of propagation of shear cracks. *J. app. Math. Mech*, **28**, 1077- 1087, (1964).
- [10] Kostrov, B. V., Unsteady propagation of longitudinal shear cracks. *J. app. Math. Mech*, **30**, 1241-1248 (1966).
- [11] Kostrov, B. V., On the crack propagation with variable velocity. *Int. J. of Fracture*, **11**, 47-56 (1975).
- [12] Madariaga, R., Dinámica de la fuente sísmica, *Física de la Tierra*, ISSN 0214-4557, **6**, 29-72 (1994).
- [13] Rundle, J. B., D. L. Turcotte, R. Shcherbakov, W. Klein, and C. Sammis, Statistical physics approach to understanding the multi-scale dynamics of earthquake fault systems, *Rev. Geophys.*, 41(4), 1019,doi:10.1029/2003RG000135 (2003).
- [14] A. Jiménez, K. F. Tiampo and A. M. Posadas, An Ising model for earthquake dynamics, *Nonlin. Processes Geophys.*, 14, 5-15 (2007).
- [15] Rice, J. R., Spatio-temporal complexity of slip on a fault, *J. Geophys. Res.*, 88, 9885-9907 (1993).

- [16] Navarro F. R. N., The Mathematical Theory of Stationary dislocations, *Philos. Mag. supp.* , vol. 1, **3** (1952).
- [17] Aki, K. & P. G. Richards, *Quantitative Seismology*, W. H. Freeman, New York (1980).
- [18] M. Peach & J. S. Koehler, The Forces Exerted on Dislocations and the Stress Fields Produced by Them, *Phys. Rev.* 80, 436 - 439 (1950).
- [19] Goldstein, Poole & Safko, *Classical Mechanics* 3th ed., Addison Wesley (2000).
- [20] Burridge R., & L. Knopoff, 1967: Model and theoretical seismicity, *Bul. Seism. Soc. Am.*, 57, 341-371 (1967).

Agradecimientos

La realización de esta tesis fue posible gracias a muchas personas que colaboraron directa o indirectamente en ella. En especial me gustaría agradecer a:

Mi profesor guía, Klaus Bataille, por darme este gran tema para desarrollar, además de su gran comprensión y muy útiles consejos.

Profesor Fernando Lund, por haber brindado su apoyo en la comprensión del trabajo sobre el que se basa nuestro estudio.

Profesor Guillermo Rubilar, por contribuir en la comprensión del cálculo variacional involucrado en este trabajo.

Profesores Aldo Montecinos y Samuel Hormazábal, quienes en su calidad de directores del DGEO brindaron siempre todas las facilidades necesarias para el desarrollo de esta tesis.

Familiares y amigos, por su incondicional apoyo e infinita paciencia.