

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Geofísica



**Deformación cortical asociada a la erupción 2011
del Complejo Volcánico Puyehue Cordon Caulle:
influencia de la estructura elástica de la corteza
según modelos 3D de elementos finitos.**

Fabien Salgado Coutaz

Habilitación Profesional
para optar por el Título de Geofísico

Septiembre 2016

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Geofísica

**Deformación cortical asociada a la erupción 2011
del Complejo Volcánico Puyehue Cordon Caulle:
influencia de la estructura elástica de la corteza
según modelos 3D de elementos finitos.**

Fabien Salgado Coutaz

Habilitación Profesional
para optar por el Título de Geofísico

Profesor Guía:
Dr. Andrés Tassara

Comisión:
Dr. Rodolfo Araya, Dr. Matthew Miller.



Septiembre 2016

Agradecimientos

Esta tesis de pregrado, tiempo de aprendizaje largo y constante, difícilmente hubiese sido posible sin el apoyo de algunas personas. A ellos les dedico estas palabras de agradecimiento.

A mis padres. A mi madre Juliette, quien es la que más se ha esmerado para que yo llegara hasta acá. Gracias por iluminarme, desde el cariño y la experiencia, durante todos estos años. A mi padre Nestor, por siempre tener una buena charla, un buen momento y un buen lugar. Un lugar lleno de castaños, que con su gente: Mi hermano Nestor, Alondra y Bayron, ocupan un lugar importante dentro de mi.

A mi familia en general, sobre todo a mi tía Gilberte, por su gran afecto, comprensión e inestimable apoyo. Una mención también para mi padrino, Mauricio, por su amistad y su capacidad para distender algunos momentos de mi vida.

A mi pareja, Alexandra, por sostenerme. Por su gran cariño, amor y amistad. Por permitirme compartir contigo tantos bellos momentos. Momentos que recordaré el resto de mi vida.

Gracias a mis profesores y apoyo académico, que me entregaron las herramientas que hicieron posible el desarrollo de este trabajo. A Andrés Tassara, por su confianza y paciencia. Por motivarme a realizar este cometido. Por su tiempo y disposición para aclarar todas mis dudas, aconsejarme y guiarme. A Rodolfo Araya, por entregarme los principios de los elementos finitos, vital en el desarrollo de esta tesis. También por su buena voluntad y ayuda desinteresada. A Marcelo Contreras, por el empujón inicial al comienzo de este largo proceso, por su generosa cooperación. A Daniel Basualto, por facilitarme su modelo de velocidades de ondas sísmicas y también por uno que otro buen momento.

A mis amigos de la vida, que han estado al lado mio siempre, ya no recuerdo hace cuanto. A Osvaldo, Luciano, Patricio, Rodrigo, Francisco, Mariana y Felipe, pilares invaluable en mi vida.

A mis amigos de la universidad, por hacer de estos años una experiencia más allá de lo académico. A Carlos, Natalia, Camilo, Melany, Alondra, Pablo, Oliver, Boris, Gonzalo, sin duda, lo mejor que me llevo de la UdeC.

Finalmente, gracias a la vida por darme la oportunidad de estar acá y a la Tierra por darme una inmensa curiosidad.

¡Gracias a todas y todos!

Índice general

Agradecimientos	3
1. Introducción	10
2. Objetivos	14
2.1. Objetivo General	14
2.2. Objetivos Específicos	14
3. Marco Teórico	15
3.1. Interferometría con Radar de Apertura Sintética	15
3.2. CVPCC y Erupción del 2011	17
3.3. Solución Analítica de fuente puntual (Mogi, 1958)	18
3.4. Ecuación de Movimiento	19
3.5. Implementación de Solución Numérica Mediante el Método de los Ele- mentos Finitos	21
3.5.1. Aspectos Generales	21
3.5.2. Derivación Variacional de la Ecuación de Movimiento	22
3.5.3. Formulación Discreta	26
3.5.4. Resultados Básicos	27
3.5.5. Cálculo Elemento a Elemento	29
3.5.6. Malla de Elementos Finitos	35
3.5.7. Imposición de las Condiciones de Frontera	40
3.5.8. Solución del Sistema Lineal	41
4. Aplicación del Método de Elementos Finitos para Deformación Co- eruptiva del CVPCC 2011	42
4.1. Mallas	42
4.2. Condiciones de Borde	45

5. Resultados y Análisis	46
5.1. Comparando Solución Analítica y Numérica Sintéticamente y Validación del Método de Elementos Finitos	46
5.1.1. Definiendo Parámetros Elásticos y Resultados Analíticos	46
5.1.2. Mogi vs FEM-Homogéneo	49
5.1.3. Mogi vs FEM-Estratificado	52
5.2. Comparación Entre Datos InSAR Co-eruptivo del CVPCC 2011 y los Modelos Propuestos	58
5.2.1. Primer Interferograma	58
5.2.2. Segundo Interferograma	65
5.2.3. Ajustando Modelos a los Datos INSAR	70
6. Discusión y Conclusión	85
6.1. Interferograma 1	86
6.2. Interferograma 2	87
6.3. Rol de Estructura Elástica del Medio	88
7. Desarrollo Futuro	89

Índice de figuras

1.1. Margen Convergente y Andes.	10
1.2. Complejo Volcánico Puyehue-Cordón Caulle.	12
3.1. Radar de Apertura Sintética.	16
3.2. Interferogramas para el CVPCC.	17
3.3. Transformación afín \mathcal{F}	28
3.4. Ejemplo de una malla bidimensional.	35
4.1. Mallas Homogénea y Estratificada.	43
4.2. Esferas.	44
4.3. Esferas en Mallas.	45
5.1. Desplazamiento Vertical Mogi.	47
5.2. Desplazamiento Radial Mogi.	48
5.3. Perfiles Desplazamientos Mogi.	49
5.4. Desplazamiento Vertical FEM-Homogéneo.	50
5.5. Desplazamiento Radial FEM-Homogéneo.	50
5.6. Perfil Desplazamientos FEM-Homogéneo.	51
5.7. Perfil Vertical Mogi vs FEM-Homogéneo.	52
5.8. Perfil Radial Mogi vs FEM-Homogéneo.	52
5.9. Dominio FEM-Estratificado.	55
5.10. Desplazamiento Vertical FEM-Estratificado.	55
5.11. Desplazamiento Radial FEM-Estratificado.	56
5.12. Perfil Vertical Mogi vs FEM-Estratificado.	56
5.13. Perfil Radial Mogi vs FEM-Estratificado.	57
5.14. Datos Interferograma 1.	59
5.15. Solución Modelo-Homogéneo para el primer interferograma proyectada sobre LOS.	60
5.16. Diferencia Interferograma 1 - Modelo-Homogéneo.	62
5.17. Solución Modelo-Estratificado proyectada sobre LOS.	63

5.18. Diferencia Interferograma 1 - FEM-Estratificado 1.	64
5.19. Datos Interferograma 2.	65
5.20. Solución del Segundo Modelo FEM-Homogéneo proyectada sobre LOS.	66
5.21. Diferencia Interferograma 2 - FEM-Homogéneo.	67
5.22. Solución Modelo FEM-Estratificado proyectada sobre LOS.	68
5.23. Diferencia Interferograma 2 - FEM-Estratificado.	69
5.24. Gráfico de la tabla 5.3, RMS vs DV.	71
5.25. Gráfico de la tabla 5.4, RMS vs DV.	72
5.26. Solución Modelo FEM-Homogéneo que minimiza los rms.	73
5.27. Diferencia Interferograma 1 - FEM-Homogéneo con rms minimizados.	74
5.28. Gráfico de la tabla 5.5, RMS vs DV	75
5.29. Gráfico de la tabla 5.6, RMS vs DV.	76
5.30. Solución Modelo FEM-Estratificado que minimiza los rms.	77
5.31. Diferencia Interferograma 1 - FEM-Estratificado con rms minimizados.	78
5.32. Gráfico de la tabla 5.8, RMS vs DV.	79
5.33. Solución Modelo FEM-Homogéneo que minimiza los rms.	80
5.34. Diferencia Interferograma 1 - FEM-Homogéneo con rms minimizados.	81
5.35. Gráfico de la tabla 5.9, RMS vs DV.	82
5.36. Solución Modelo FEM-Estratificado que minimiza los rms.	83
5.37. Diferencia Interferograma 1 - FEM-Estratificado con rms minimizados.	84

Índice de Tablas

5.1. Tabla de valores de velocidades para ondas P y S en el CVCC, según modelo local.	53
5.2. Tabla de valores para los Parámetros de Lamé, derivados de la tabla 5.1.	54
5.3. Muestra los distintos rms obtenido de los test para nuestro modelo FEM-Homogéneo. Se hizo variar la cámara ubicada al Noroeste del complejo (la de mayor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la segunda cámara quedó fija en $-0,018 \text{ km}^3$	70
5.4. Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Homogéneo. Se hizo variar la cámara ubicada al Sureste del complejo (la de menor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la primera cámara quedó fija en $-0,0825 \text{ km}^3$ (menor rms de la tabla anterior).	71
5.5. Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Estratificado. Se hizo variar la cámara ubicada al Noroeste del complejo (la de mayor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la segunda cámara quedó fija en $-0,018 \text{ km}^3$	75
5.6. Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Estratificado. Se hizo variar la cámara ubicada al Sureste del complejo (la de menor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la primera cámara quedó fija en $-0,0725 \text{ km}^3$ (menor rms de la tabla anterior).	75
5.7. Resumen de los modelos que mostraron menor rms del interferograma 1 junto con la solución analítica (<i>Wendt et al., 2016</i>).	78
5.8. Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Homogéneo.	79
5.9. Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Estratificado.	82
5.10. Resumen de los modelos que mostraron menor rms para el interferograma 2 junto con la solución analítica (<i>Wendt et al., 2016</i>).	84

Capítulo 1

Introducción

Chile se encuentra ubicado sobre un margen convergente de placas (figura 1.1), en una zona donde converge la Placa de Nazca bajo la Placa de Sudamérica. Por este motivo, Chile posee un importante arco volcánico.

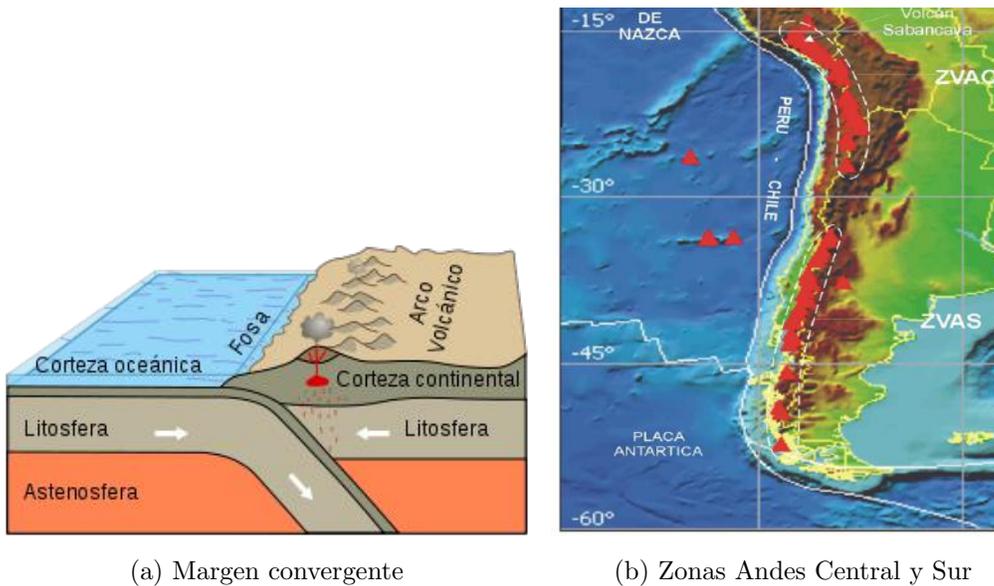


Figura 1.1: (a) Diagrama de un margen convergente entre corteza oceánica y corteza continental. (b) Volcanes (triángulos rojos) de las Zonas Central y Sur de los Andes.

En Chile hay más de 2000 volcanes, de los cuales 500 han tenido actividad comprobada en el período Plioceno-Holoceno. De ellos, 186 tienen actividad verificada en el Pleistoceno Medio al Holoceno y 82 tienen registro seguro de actividad en el Holoceno

(*Simkin y Siebert, 1994*). 61 volcanes chilenos han tenido ciclos eruptivos históricos y aproximadamente 34 exhiben actividad visible o detectable mediante instrumentos (*Lara et al., 2006*).

En la lista de peligrosidad volcánica creada por el SERNAGEOMIN, en el puesto número 11, aparece el Complejo Volcánico Puyehue-Cordón Caulle (CVPCC). Este se ubica en las coordenadas $40,59^{\circ}$ S – $72,11^{\circ}$ O. El CVPCC es un conjunto de centros emisores coalescentes pleistoceno-holocenos situados en la zona central de los Andes del Sur, en la Región de los Ríos. Entre los volcanes principales que forman este complejo, cuya arquitectura es la de un alineamiento de rumbo Noroeste-Sureste, se encuentra la caldera Cordillera Nevada, el estratovolcán Puyehue y el volcán fisural Cordón Caulle (figura 1.2). Según la ficha del SERNAGEOMIN, este complejo es el campo volcánico más voluminoso al sur de la Región del Maule y alberga un importante campo geotérmico (*Sepúlveda et al., 2004*).

La actividad eruptiva que esculpió progresivamente este campo volcánico comenzó hace aproximadamente 500 mil años, desarrollándose de manera contemporánea pero independiente en los principales centros del complejo. La primera fase de construcción terminó con colapsos y periodos de erupción intensa. A esto, le siguió una etapa de reconstrucción de los edificios en los últimos 100 mil años, que finalmente le han dado la forma actual a las estructuras volcánicas. Los productos volcánicos generados por este complejo cubren un amplio rango composicional, desde basaltos a riolitas. Sin embargo, las erupciones más recientes, cubren un rango más estrecho, dominando riodacitas y riolitas (*Lara et al., 2006*).

Actualmente, este complejo es uno de los más activos de los Andes del Sur. Registra tres erupciones importante en los últimos 100 años: 1921-22, 1960 y 2011-12; todas estas en el Cordón Caulle.

En el presente estudio, nos centraremos en la última erupción ocurrida en el Cordón Caulle, en el 2011. Esta erupción comenzó el 4 de junio del 2011, después de dos meses de sismicidad superficial (*Bertin et al., 2015*). La fase con la actividad explosiva más intensa, duró aproximadamente 72 horas. Después de varios días de disminución en la intensidad de la fase explosiva, una etapa efusiva comenzó el día 15 de junio del 2011.

Esta última etapa declinó su intensidad paulatinamente los meses que siguieron, hasta que la erupción cesó entre Junio y Agosto del 2012.

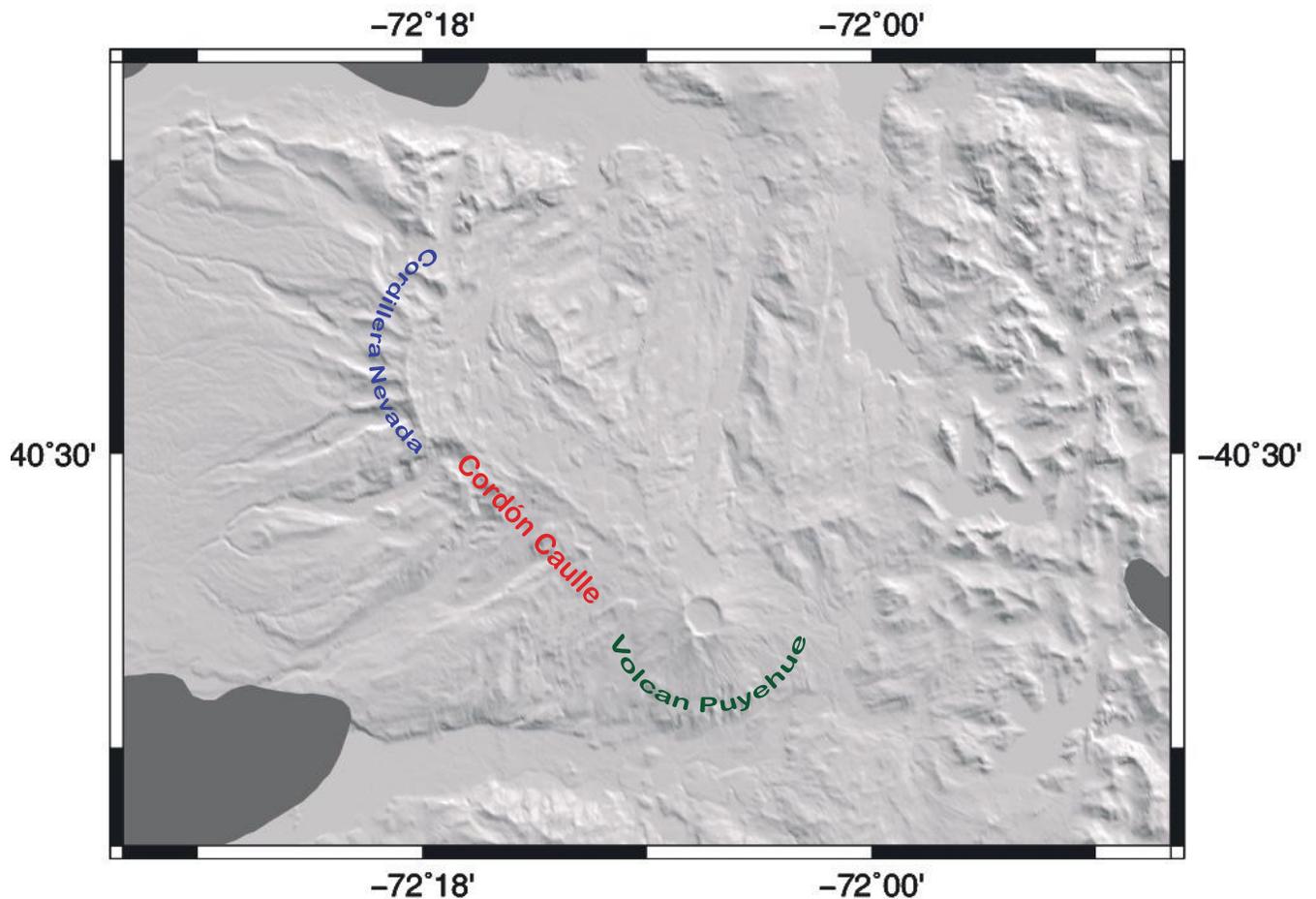


Figura 1.2: Zona de estudio. Se muestran las principales estructuras del CVPCC: El Volcán Puyehue, la Cordillera Nevada y el Cordón Caulle.

Durante esta erupción, gracias a datos satelitales InSAR (Interferometría con Radar de Apertura Sintética), se pudieron registrar desplazamientos importantes en la superficie del complejo. *Jay et al. (2014)* y *Wendt et al. (2016)* utilizaron estos registros, más las ecuaciones analíticas de *Mogi (1958)* y *Okada (1985)*, para invertir los datos y conocer algunos parámetros de las fuentes que producen la deformación superficial, como la localización y los cambios de volumen de éstas, que minimizan las diferencias entre las predicciones hechas por las ecuaciones y los datos reales.

Este trabajo, pretende utilizar los parámetros de las fuentes calculados por *Wendt et al. (2016)* para crear un nuevo modelo utilizando la técnica de los elementos fini-

tos. Los elementos finitos nos entregan mayor versatilidad a la hora de modelar, en comparación a las ecuaciones analíticas. Esta versatilidad la ocuparemos para hacer un modelo estratificado en cuanto a parámetros elásticos, y así no asumir la limitante de las ecuaciones de *Mogi. (1958)*: La corteza de la tierra es un semi-espacio homogéneo, infinito, sólido de Poisson e isotrópico.

Con esto, queremos testear cuanto puede afectar este supuesto en los resultados de los modelos.

Para lo anterior, se cuenta con dos interferogramas, facilitados por *Anja Wendt*, y un modelo de velocidades de ondas sísmicas del CVPCC, facilitado y creado por *Daniel Basualto* en el marco de sus tesis doctoral. El primer interferograma comprende el periodo entre el 08/05/2011 y el 07/06/2011, mientras que el segundo toma el lapso entre el 07/06/2011 y el 07/07/2011. En este estudio se tomarán las localizaciones y cambios de volumen de las cámaras calculadas por *Wendt et al. (2016)* para generar 2 modelos con elementos finitos para cada interferograma; el primero suponiendo un medio homogéneo, similar a la premisa de *Mogi (1958)*, mientras que el segundo contemplará un medio estratificado que reproduce el modelo de velocidades sísmicas mencionado anteriormente. Así, podremos discutir el rol que puede jugar la configuración del medio dentro de un modelamiento de este tipo.

Capítulo 2

Objetivos

2.1. Objetivo General

El principal objetivo de este trabajo es testear las implicancias que puede tener la implementación de un medio estratificado, a través de un modelo de elementos finitos, en el estudio de la deformación producida por una esfera inserta en un medio que cambia de volumen, en contraste con un modelo de elementos finitos homogéneo (no estratificado) y un modelo analítico tipo *Mogi (1958)*. Con esto se pretende cuestionar la suposición ideal de considerar el medio como un semi-espacio infinito, sólido de Poisson, homogéneo e isotrópico (*Mogi, 1958*).

2.2. Objetivos Específicos

Testear el funcionamiento del programa de elementos finitos *Elast* para el caso en tres dimensiones, reproduciendo la deformación superficial debido a un cambio de volumen de una esfera inmersa en un medio.

Comparar una solución analítica tipo *Mogi (1958)* versus una solución calculada con el método de elementos finitos.

Configurar un medio, personificado en una malla, lo más realista posible con los recursos disponibles.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Interferometría con Radar de Apertura Sintética

La Interferometría con Radar de Apertura Sintética (InSAR) es una técnica que puede aplicarse a muchas áreas diferentes. Implica utilizar un radar para registrar dos o más imágenes de exactamente la misma área en diferentes puntos temporales. Al comparar las imágenes, es posible detectar cualquier cambio que pueda haber ocurrido durante ese periodo particular de tiempo. La interferometría se puede conseguir con un único satélite o usando dos que van uno detrás del otro.

La figura 3.1 (a) muestra un satélite con una radar de apertura sintética tomando una imagen. Con dos de estas imágenes ya podríamos construir un interferograma. Mientras que la figura 3.1 (b) nos enseña la línea de visión del satélite o line of sight (LOS). Es importante entender que los desplazamientos mostrados por un interferograma serán siempre en la línea de visión del satélite, por lo tanto sólo tendremos una componente del desplazamiento. Esto supone un problema, ya que si quisieramos comparar las soluciones de algún modelo con los datos de un interferograma, deberíamos proyectar la solución del modelo en la dirección LOS, o bien intentar inferir los desplazamientos en las componentes de nuestro interés.

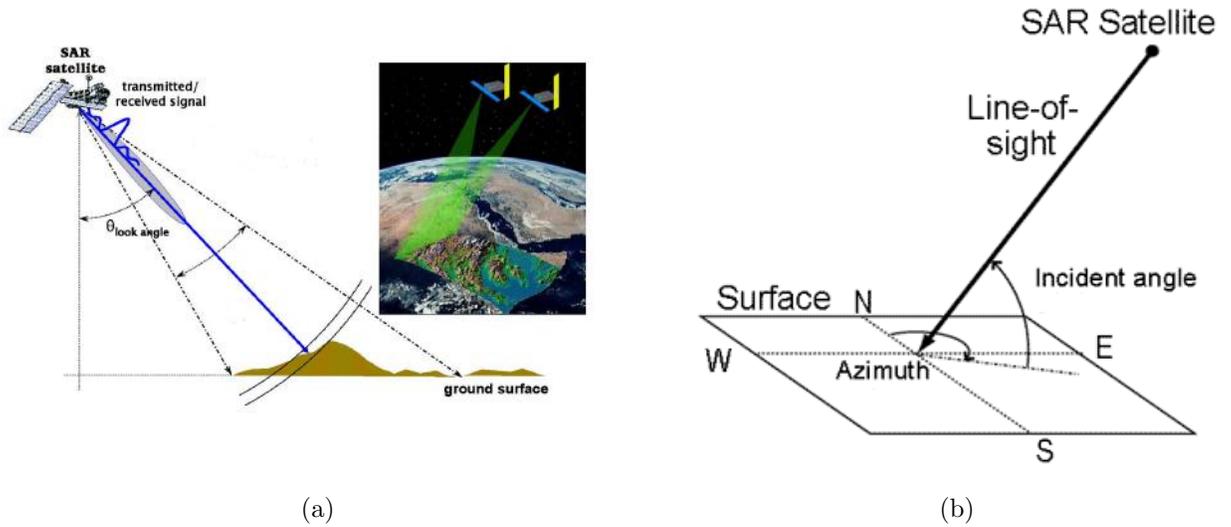


Figura 3.1: (a) Diagrama de un satélite captando una imagen con un Radar de Apertura Sintética. (b) Ilustración de la línea de visión del satélite o line of sight.

La figura 3.2 muestra un interferograma del CVPCC sin procesar, publicada por *Bigname et al. (2014)*. Esto significa que nos muestra diferencias de fases entre las ondas emitidas por cada paso del satélite. En una etapa posterior, estas diferencias de fases son interpretadas como deformación de la superficie y se calculan los desplazamientos en base a la diferencia de fase.

Los interferogramas (b) y (c) de la figura 3.2, nos muestra los mayores desplazamientos. Esto lo podemos inferir de la alta tasa de los cambios de fase por unidad espacial, formando una especie de anillos al rededor de la fuente. Si vemos las fechas de los interferogramas, nos daremos cuenta que (b) incluye los primeros 3 días de la erupción, mientras que (c) incluye, aproximadamente, el primer mes posterior al comienzo de la erupción. Esto explica las altas tasas de deformación vistos en estos interferogramas.

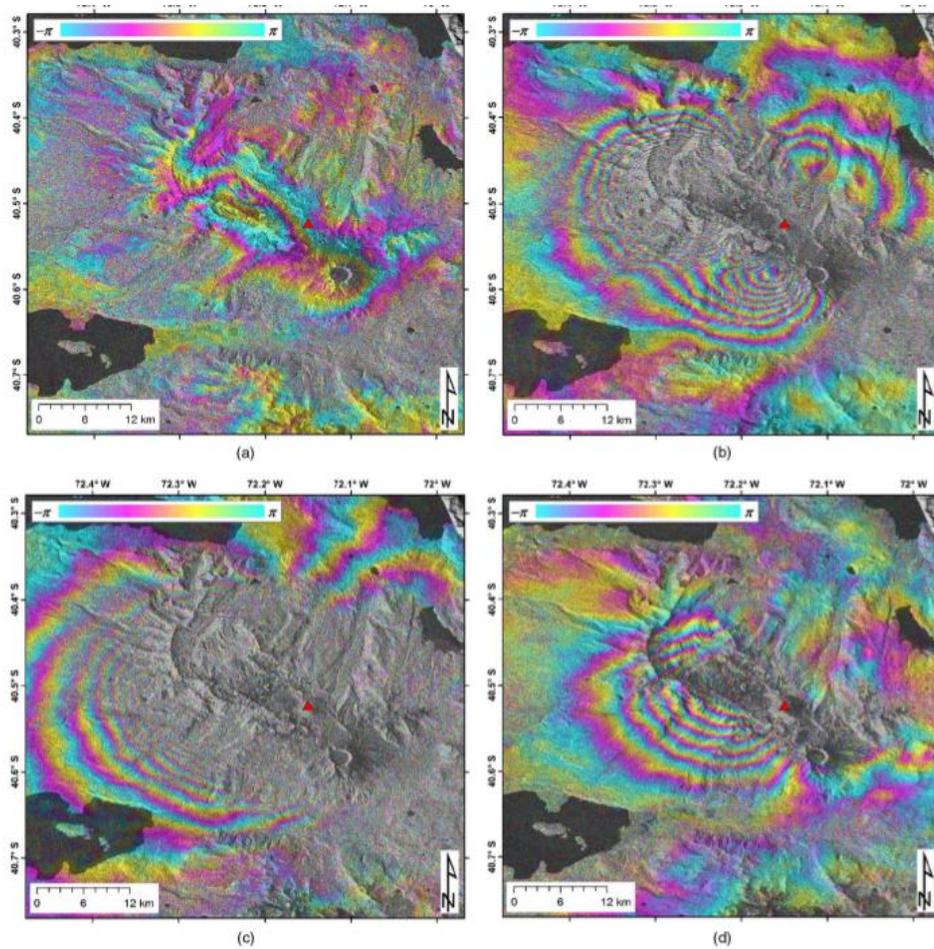


Figura 3.2: Interferogramas para el CVPCC publicados por *Bignami et al., (2014)*. (a) Va desde el 08/04/2011 hasta el 08/05/2011, (b) del 08/05/2011 al 07/06/2011, (c) desde el 07/06/2011 hasta el 07/07/2011 y (d) del 05/10/2011 al 04/12/2011.

3.2. CVPCC y Erupción del 2011

El Complejo Volcánico Puyehue Cordón Caulle, es un centro volcánico activo de los Andes del Sur ($40,5^{\circ} S$) que ha eruptado de basaltos hasta riolitas desde la mitad del pleistoceno (*Singer et al., 2008*). Está formado por la yuxtaposición de tres volcanes: Cordillera Nevada, Sistema Fisural Cordón Caulle y el Estratovolcán Puyehue. Este complejo está a un costado de la principal falla paralela a la fosa, la Falla de Liquiñe-Ofqui y registra una de las tasas eruptivas, en promedio, más altas de los Andes del Sur, aproximadamente $0,42 \frac{km^3}{Kyr}$ (*Singer et al., 2008*).

Las últimas tres erupciones (1921-1922, 1960 y 2011-2012) fueron a lo largo del

sistema fisural Cordón Caulle. Se piensa que la erupción de 1960 fue un clásico ejemplo de gatillamiento remoto debido al gran Terremoto de Valdivia ($9,5Mw$) que ocurrió 36 horas antes (*Lara et al., 2004*). Esto, también da pie para pensar en que la última erupción podría estar relacionada al Terremoto del Maule 2010 ($8,8Mw$), pero esta relación es menos clara debido a la distancia temporal y espacial entre la erupción y el terremoto.

La última erupción, comenzó el día 4 de Junio del 2011, después de dos meses de sismisidad superficial (*Bertin et al., 2015*). La fase explosiva inicial duró aproximadamente 72 horas, liberando $0,96km^3$ de tefra, equivalente a $0,27km^3$ de DRE (Dense Rock Equivalent) (*Pistolesi et al., 2015*). La noche del 15 de Junio comenzó la extrusión de un flujo lávico, dando lugar a la fase efusiva de la erupción. Esta fase llegó a su peak una semana después, registrando tasas de $70\frac{m^3}{s}$ (*Bertin et al., 2012*). La fase efusiva fue disminuyendo en intensidad paulatinamente, hasta cesar completamente entre Junio y Agosto del 2012, contabilizando un total de $0,5km^3$ de lava eruptada en este periodo (*Bertin et al., 2012*). En total (sumando fase explosiva y efusiva), se calculó en $0,77km^3$ el total de magma eruptada.

Hay registros InSAR que dan cuenta de una gran deformación superficial, antes y durante esta erupción. *Wendt et al. (2016)* y *Jay et al. (2014)* han logrado modelar analíticamente esta deformación, invirtiendo los datos InSAR observados. Ambos han llegado a resultados muy parecidos en cuanto a la localización y magnitud de las fuentes de esta deformación, estos resultados constituyen el punto de partida de los modelos con elementos finitos que presentaremos en las siguientes secciones.

3.3. Solución Analítica de fuente puntual (Mogi, 1958)

Mogi (1958) muestra que es posible modelar deformación volcánica asumiendo la fuente de la deformación como una esfera inmersa en un semi-espacio infinito, sólido de Poisson ($\lambda = \mu$), homogéneo e isotrópico. *Mogi (1958)* nos da unas simples ecuaciones que han demostrado funcionar muy bien para modelar algunos casos de deformación

superficial durante ciertas erupciones volcánicas:

$$\Delta d = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{d}{(f^2 + d^2)} \quad (3.1)$$

$$\Delta h = \frac{3a^3 \Delta P}{4\mu} \frac{f}{(f^2 + d^2)} \quad (3.2)$$

Donde Δd es el desplazamiento radial en superficie, Δh es el desplazamiento vertical en superficie, f es la profundidad del centro de la esfera desde la superficie, d es la distancia radial en superficie desde la proyección del centro de la esfera, $\mu(= \lambda)$ representa los Parámetros de Lamé, a es el radio de la esfera y ΔP es el cambio de la presión hidrostática en dicha esfera.

Estas ecuaciones, ampliamente ocupadas en el mundo de la modelación volcánica, han demostrado dar buenos resultados para modelar deformación volcánica (*Mogi, 1958; Masterlack, 2007; Jay et al, 2014; Wendt et al, 2016*). Sin embargo, queda la duda del rol que adquiere aceptar un medio tan ideal como se plantea en el trabajo de *Mogi (1958)*.

Una de las preguntas fundamentales de este trabajo apunta hacia estas interrogativas. ¿Qué pasa si no se asume un semi-espacio infinito? ¿Qué ocurre si no asumimos el medio homogéneo? ¿Qué sucede si λ es distinto de μ ?

Para intentar responder a estas preguntas, gracias a la versatilidad de los elementos finitos, configuraremos un medio que no tenga tantas limitantes y se acerque un poco más a la realidad. Además de las mallas que nos repliquen dicho medio, también necesitaremos de otras ecuaciones, distintas a las analíticas, para poder calcular los desplazamientos de nuestros modelos de elementos finitos.

3.4. Ecuación de Movimiento

La principal ecuación que gobernará el comportamiento de nuestros futuros modelos es la Ecuación de Movimiento. La Ecuación de Movimiento, en términos de las variables

de desplazamiento \mathbf{u} y esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, para un medio de densidad ρ sometido a una fuerza por unidad de volumen \mathbf{f} , queda determinada por:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (3.3)$$

El término $\ddot{\mathbf{u}}$ da cuenta de propagación de ondas sísmicas de alta frecuencia, es decir, oscilaciones rápidas. En este trabajo se pretende estudiar deformación estática y por lo tanto, las variaciones rápidas debido al término $\ddot{\mathbf{u}}$ pueden ser ignoradas. Bajo esta condición, y tomando en cuenta las condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann, podemos reescribir la ecuación 3.3 como:

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D && \text{en } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{en } \Gamma_N \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Donde \mathbf{f} representa las fuerzas volumétricas en el dominio Ω . Las dos ecuaciones adicionales, representan las condiciones de frontera para el presente estudio. \mathbf{u}_D simboliza el desplazamiento impuesto (condición de Dirichlet) en Γ_D . En nuestro caso, Γ_D son las paredes laterales e inferiores de nuestro dominio, donde imponemos que el desplazamiento es nulo, suponiendo que estos límites están lo suficientemente alejados de la fuente para sufrir deformación. Mientras que \mathbf{g} denota el esfuerzo superficial externo (condición de Neumann) en Γ_N y \mathbf{n} es el campo de vectores normal a la superficie. En este trabajo, Γ_N serán las esferas que simulan las fuentes, siendo estas también parte de las fronteras de nuestro dominio. A continuación veremos como se resuelven numéricamente estas ecuaciones.

3.5. Implementación de Solución Numérica Mediante el Método de los Elementos Finitos

3.5.1. Aspectos Generales

El Método de los Elementos Finitos (FEM, por sus siglas en inglés) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de las Ciencias de la Tierra e Ingeniería. Este método, en principio fue desarrollado por el matemático Richard Courant en 1943. El FEM nos permite encontrar una solución numérica aproximada sobre un dominio, en el cual, su comportamiento físico, está definido por ciertas ecuaciones diferenciales parciales.

Para buscar estas soluciones con FEM, primero se procede a mallar el dominio. La malla del dominio representará un espacio bi o tri-dimensional que personifica al cuerpo de estudio. Para esto, es necesario definir una nube de puntos llamados nodos. La densidad de nodos nos definirá la cantidad de subdominios en la cual se dividirá nuestra malla. Ya que estamos trabajando en tres dimensiones, los subdominios de nuestra malla tienen forma de tetraedros (en 2D podrían tener forma de triángulos o cuadrados). La solución para nuestra ecuación modelo se calculará sobre los nodos, es por esto que es importante crear un número elevado de subdominios - no intersectados entre sí - para asegurar una gran cantidad de soluciones (esto dependerá mucho de los recursos informáticos que se tengan a disposición). A partir de la unión de elementos (subdominios), podemos crear una gran cantidad de estructuras. En este trabajo, ocupamos esta versatilidad que nos dan los elementos finitos para representar distintos tipos de medios elásticos y de esferas inmersas en estos medios, que simulan cámaras magmáticas de nuestra zona de investigación. En el presente estudio, las mallas se crearon con la ayuda de dos programas: *Tetgen* y *Meshlab*. Y fueron visualizadas a través de *Paraview*. Mientras que la soluciones, que se rigen por los pasos que mostraremos en las subsecciones posteriores, fueron posible obtenerlas gracias al programa *Elast*, desarrollado y facilitado por *Rodolfo Araya*, donde están implementados todos los arreglos que se muestran a continuación.

3.5.2. Derivación Variacional de la Ecuación de Movimiento

Una forma de hacer tratables, mediante métodos numéricos, las ecuaciones 3.4, es intentar reescribirlas de una forma integral, esto se conoce como formulación débil o formulación variacional del problema. Para esto, primero multiplicamos la primera ecuación de (3.4) por una función test \mathbf{v} :

$$(-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}))\mathbf{v} = \mathbf{f}\mathbf{v} \quad (3.5)$$

Integrando:

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}\mathbf{v} \, dx \quad (3.6)$$

Como estamos trabajando en tres dimensiones, el tensor esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ y el vector \mathbf{v} tienen esta forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Así, calculando la divergencia del tensor esfuerzo y multiplicandolo por \mathbf{v} , obtenemos:

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \left. \begin{aligned} &((\partial_1 \sigma_{11})v_1 + (\partial_2 \sigma_{12})v_1 + (\partial_3 \sigma_{13})v_1 + (\partial_1 \sigma_{21})v_2 \\ &+ (\partial_2 \sigma_{22})v_2 + (\partial_3 \sigma_{23})v_2 + (\partial_1 \sigma_{31})v_3 + (\partial_2 \sigma_{32})v_3 \\ &+ (\partial_3 \sigma_{33})v_3 \end{aligned} \right\} dx \quad (3.7)$$

Donde $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ y $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$.

Recordemos que para un vector \mathbf{U} , el teorema de la divergencia de Gauss nos da la siguiente relación:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{U} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.8)$$

Si consideramos \mathbf{U} de la forma:

$$\mathbf{U}_1 = (\sigma_{11}v_1, 0, 0)$$

$$\implies \nabla \cdot \mathbf{U}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} v_1 + \sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \quad (3.9)$$

$$\implies \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n} = \sigma_{11} v_1 n_1 \quad (3.10)$$

Reemplazando 3.9 y 3.10 en 3.8:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} v_1 dx + \int_{\Omega} \sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{11} v_1 n_1 \, dS \\ \iff \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} v_1 dx &= - \int_{\Omega} \sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx + \int_{\partial\Omega} \sigma_{11} v_1 n_1 \, dS \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nos podemos dar cuenta que el término a la izquierda de la ecuación 3.11 es igual al primer término del lado derecho de la ecuación 3.7. Así, podemos escoger U_2, U_3, \dots, U_9 análogamente al caso anterior, de manera que podemos usar el teorema de Gauss para encontrar una relación equivalente y reemplazar en 3.7. Estos vectores son:

$$\begin{aligned} U_2 &= (0, \sigma_{12}v_1, 0); U_3 = (0, 0, \sigma_{13}v_1); U_4 = (\sigma_{21}v_2, 0, 0); U_5 = (0, \sigma_{22}v_2, 0); \\ U_6 &= (0, 0, \sigma_{23}v_2); U_7 = (\sigma_{31}v_3, 0, 0); U_8 = (0, \sigma_{32}v_3, 0); U_9 = (0, 0, \sigma_{33}v_3). \end{aligned}$$

Entonces, podemos calcular la divergencia de cada vector y multiplicarlos por el vector \mathbf{n} , como en las ecuaciones 3.9 y 3.10, respectivamente. Luego aplicamos el teorema de Gauss, para encontrar una relación reemplazable en 3.7, tal como lo hicimos para la ecuación 3.11. Si hacemos esto, y reemplazamos en 3.7, el resultado es:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{11}(\mathbf{u}) n_1 v_1 \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{12}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} \sigma_{12}(\mathbf{u}) n_2 v_1 \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{13}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{13}(\mathbf{u}) n_3 v_1 \, dS \\
 &\quad + \int_{\Omega} \sigma_{21}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{21}(\mathbf{u}) n_1 v_2 \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{22}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} \sigma_{22}(\mathbf{u}) n_2 v_2 \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{23}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{23}(\mathbf{u}) n_3 v_2 \, dS \\
 &\quad + \int_{\Omega} \sigma_{31}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{31}(\mathbf{u}) n_1 v_3 \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{32}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} \sigma_{32}(\mathbf{u}) n_2 v_3 \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{33}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{33}(\mathbf{u}) n_3 v_3 \, dS \Bigg\} \\
 \\
 \Leftrightarrow \int_{\Omega} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \sigma_{12}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx + \int_{\Omega} \sigma_{13}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \sigma_{21}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \sigma_{22}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx + \int_{\Omega} \sigma_{23}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \sigma_{31}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \sigma_{32}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx + \int_{\Omega} \sigma_{33}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} (\sigma_{11}(\mathbf{u}) n_1 v_1 + \sigma_{12}(\mathbf{u}) n_2 v_1 + \sigma_{13}(\mathbf{u}) n_3 v_1 + \sigma_{21}(\mathbf{u}) n_1 v_2 \\
 &\quad \quad + \sigma_{22}(\mathbf{u}) n_2 v_2 + \sigma_{23}(\mathbf{u}) n_3 v_2 + \sigma_{31}(\mathbf{u}) n_1 v_3 + \sigma_{32}(\mathbf{u}) n_2 v_3 \\
 &\quad \quad \quad + \sigma_{33}(\mathbf{u}) n_3 v_3) \, dS \Bigg\} \\
 &\hspace{20em} (3.12)
 \end{aligned}$$

Ya que el tensor de esfuerzo es simétrico, podemos reescribir la ecuación 3.12:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \int_{\Omega} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \sigma_{11}(\mathbf{u})\epsilon_{11}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{12}(\mathbf{u})\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \sigma_{21}(\mathbf{u})\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx + \int_{\Omega} \sigma_{13}(\mathbf{u})\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \sigma_{31}(\mathbf{u})\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) dx + \int_{\Omega} \sigma_{23}(\mathbf{u})\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) dx \\
 &+ \int_{\Omega} \sigma_{32}(\mathbf{u})\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx + \int_{\Omega} \sigma_{22}(\mathbf{u})\epsilon_{22}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{33}(\mathbf{u})\epsilon_{33}(\mathbf{v})dx \\
 &- \int_{\partial\Omega} (\sigma_{11}(\mathbf{u})n_1v_1 + \sigma_{12}(\mathbf{u})n_2v_1 + \sigma_{13}(\mathbf{u})n_3v_1 + \sigma_{21}(\mathbf{u})n_1v_2 \\
 &\quad + \sigma_{22}(\mathbf{u})n_2v_2 + \sigma_{23}(\mathbf{u})n_3v_2 + \sigma_{31}(\mathbf{u})n_1v_3 + \sigma_{32}(\mathbf{u})n_2v_3 \\
 &\quad + \sigma_{33}(\mathbf{u})n_3v_3) \, dS
 \end{aligned} \right\} \\
 \\
 \Leftrightarrow & \left. \begin{aligned}
 \int_{\Omega} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \sigma_{11}(\mathbf{u})\epsilon_{11}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{12}(\mathbf{u})\epsilon_{12}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{21}(\mathbf{u})\epsilon_{21}(\mathbf{v})dx \\
 &+ \int_{\Omega} \sigma_{13}(\mathbf{u})\epsilon_{13}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{31}(\mathbf{u})\epsilon_{31}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{23}(\mathbf{u})\epsilon_{23}(\mathbf{v})dx \\
 &+ \int_{\Omega} \sigma_{32}(\mathbf{u})\epsilon_{32}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{22}(\mathbf{u})\epsilon_{22}(\mathbf{v})dx + \int_{\Omega} \sigma_{33}(\mathbf{u})\epsilon_{33}(\mathbf{v})dx \\
 &- \int_{\partial\Omega} (\sigma_{11}(\mathbf{u})n_1v_1 + \sigma_{12}(\mathbf{u})n_2v_1 + \sigma_{13}(\mathbf{u})n_3v_1 + \sigma_{21}(\mathbf{u})n_1v_2 \\
 &\quad + \sigma_{22}(\mathbf{u})n_2v_2 + \sigma_{23}(\mathbf{u})n_3v_2 + \sigma_{31}(\mathbf{u})n_1v_3 + \sigma_{32}(\mathbf{u})n_2v_3 \\
 &\quad + \sigma_{33}(\mathbf{u})n_3v_3) \, dS
 \end{aligned} \right\} \\
 \\
 \Leftrightarrow & \int_{\Omega} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS
 \end{aligned}$$

Ocupando la ecuación 3.4:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dS \quad (3.13)$$

Así, resolver 3.6 y finalmente 3.4, se resume a hallar $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ (Espacio de Hilbert), tal

que (formulación variacional):

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} \quad (3.14)$$

3.5.3. Formulación Discreta

Para resolver el problema planteado por las ecuaciones (3.4) mediante el método de los elementos finitos, es necesario escoger un subespacio de \mathbf{H} , de dimensión finita, definida como:

$$\mathbf{H}_h := \{\mathbf{v}_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{v}_h \text{ es continua ; } \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}_1^2, \forall T \in \mathcal{T}_h; \mathbf{v}_h = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$$

Donde, \mathcal{T}_h queda definido por una triangulación (malla), compuesta, para el caso 3D, por tetraedros (nuestro caso) o por Hexaedros, mientras que para el caso 2D podrían ser cuadriláteros o triángulos. O una mezcla de los mismos.

La formulación discreta asociada al problema variacional (3.14) está dada por:
Hallar $\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_h$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_h) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h \, dS \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h \quad (3.15)$$

Usando las propiedades de la integral, tenemos que (3.15) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_h) \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, dx + \sum_{F \in \partial T \cap \Gamma_N} \int_F \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h \, dS \right\} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h \quad (3.16)$$

Esto permite localizar el cálculo en cada elemento T .

3.5.4. Resultados Básicos

Sea T , un tetraedro arbitrario de la triangulación \mathcal{T}_h , de vértices (nodos)

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 := \begin{pmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{pmatrix},$$

Sea \hat{T} el tetraedro de referencia de nodos

$$\hat{\mathbf{a}}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Denotemos por \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{x}}$ a los sistemas de coordenadas dados por:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix},$$

Podemos definir una transformación afín invertible $\mathcal{F} : \hat{T} \rightarrow T$ tal que $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{a}}_i) = \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, de la siguiente forma

$$F(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{x}$$

donde \mathbf{B} , una matriz invertible, y el vector \mathbf{b} están dados por:

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} x^2 - x^1 & x^3 - x^1 & x^4 - x^1 \\ y^2 - y^1 & y^3 - y^1 & y^4 - y^1 \\ z^2 - z^1 & z^3 - z^1 & z^4 - z^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix},$$

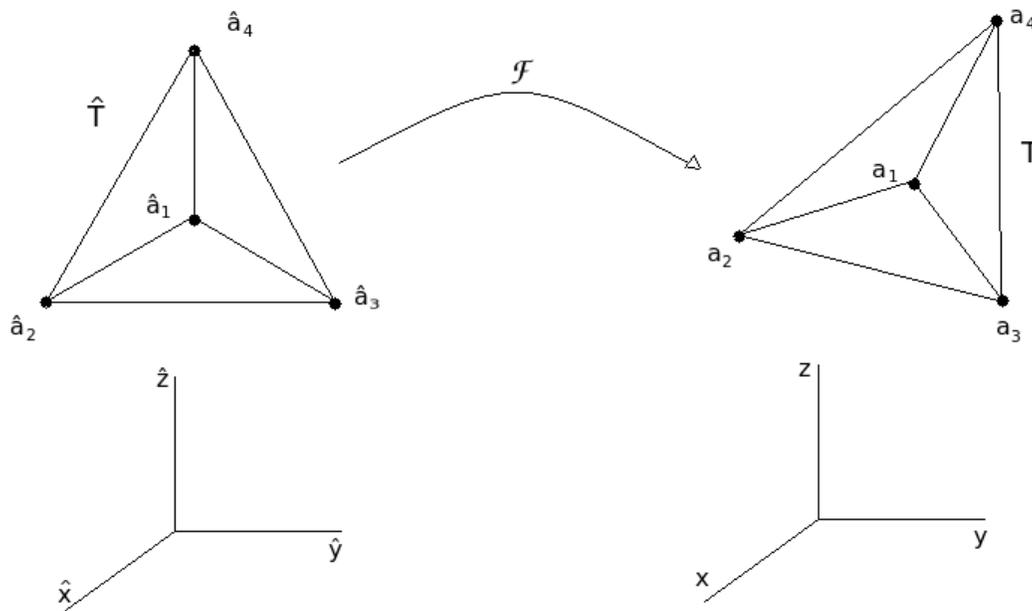


Figura 3.3: Transformación afín \mathcal{F} que va desde el tetraedro de referencia \hat{T} a un tetraedro arbitrario T de la triangulación.

Se puede demostrar que $\mathcal{F}^{-1} : T \rightarrow \hat{T}$ está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$$

Donde la transformación afín \mathcal{F} satisface

$$J_{\mathcal{F}} = \mathbf{B}; \quad |J_{\mathcal{F}}| = \det(\mathbf{B}) = 2|T| \quad (3.17)$$

Además, dada la función $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir $\hat{\varphi} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\hat{\varphi} = \varphi \circ \mathcal{F}$$

de donde, usando la regla de la cadena, se obtiene que

$$\hat{\nabla}\hat{\varphi} = \mathbf{B}^T \nabla\varphi$$

luego

$$\nabla\varphi = \mathbf{B}^{-T}\hat{\nabla}\hat{\varphi}$$

Usando el teorema de cambio de variable para el cálculo de integrales, tenemos

$$\int_T \varphi d\mathbf{x} = |J_{\mathcal{F}}| \int_{\hat{T}} \hat{\varphi} d\hat{\mathbf{x}}$$

lo que también implica que

$$\int_T \nabla \varphi \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} = \int_{\hat{T}} \mathbf{B}^{-T} \hat{\nabla} \hat{\varphi} \cdot \mathbf{B}^{-T} \hat{\nabla} \hat{\psi} |J_{\mathcal{F}}| d\hat{\mathbf{x}} \quad (3.18)$$

3.5.5. Cálculo Elemento a Elemento

En esta sección veremos cómo calcular la matriz elemental asociada al método de los elementos finitos.

De ahora en adelante supondremos que todos los cálculos son realizados elemento a elemento. Sea T el tetraedro de nodos (vértices) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$. Para los cálculos sobre T usaremos las siguientes notaciones:

$$[P] := (p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4)_{1 \times 4}, \quad (3.19)$$

donde p_1, p_2, p_3 y p_4 representan las funciones base asociadas al elemento T , estas se escogen de modo que $p_i \in \mathbb{P}_1(T)$ y

$$p_i(\mathbf{a}_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Para el caso del elemento de referencia \hat{T} se puede demostrar que las funciones de base $\hat{p}_i \in \mathbb{P}_1(\hat{T})$ están dadas por

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \\ \hat{p}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x} \\ \hat{p}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y} \\ \hat{p}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{z} \end{aligned}$$

Donde las funciones de base $\hat{p}_i \in \mathcal{P}_1(\hat{T})$ se obtienen por medio de

$$p_i(x, y, z) = \hat{p}_i \circ \mathbb{F}^{-1}(x, y, z)$$

La siguiente notación es útil para el cálculo elemento a elemento:

$$\mathbf{u}|_T = [\mathbf{P}]\mathbf{u}$$

donde

$$[\mathbf{P}] := \begin{pmatrix} [P] & 0 & 0 \\ 0 & [P] & 0 \\ 0 & 0 & [P] \end{pmatrix}_{3 \times 12},$$

$$[\mathbf{u}] := \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{a}_1) \\ u_1(\mathbf{a}_2) \\ u_1(\mathbf{a}_3) \\ u_1(\mathbf{a}_4) \\ \text{---} \\ u_2(\mathbf{a}_1) \\ u_2(\mathbf{a}_2) \\ u_2(\mathbf{a}_3) \\ u_2(\mathbf{a}_4) \\ \text{---} \\ u_3(\mathbf{a}_1) \\ u_3(\mathbf{a}_2) \\ u_3(\mathbf{a}_3) \\ u_3(\mathbf{a}_4) \end{pmatrix}_{12 \times 1} = \begin{pmatrix} [u_1]_{4 \times 1} \\ \text{---} \\ [u_2]_{4 \times 1} \\ \text{---} \\ [u_3]_{4 \times 1} \end{pmatrix}$$

y

$$[DP] := \begin{pmatrix} \partial_1 p_1 & \partial_1 p_2 & \partial_1 p_3 & \partial_1 p_4 \\ \partial_2 p_1 & \partial_2 p_2 & \partial_2 p_3 & \partial_2 p_4 \\ \partial_3 p_1 & \partial_3 p_2 & \partial_3 p_3 & \partial_3 p_4 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

Como \mathbf{u} es una función vectorial de 3×1 , podemos obtener la matriz de 3×3 $\nabla \mathbf{u}$, esto es:

$$\nabla \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}_{3 \times 3},$$

Luego, podemos reescribir $\nabla \mathbf{u}$ como un vector de \mathbb{R}^9 de la siguiente forma:

$$\nabla \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ \partial_2 u_1 \\ \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 \\ \partial_2 u_2 \\ \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 \\ \partial_2 u_3 \\ \partial_3 u_3 \end{pmatrix}_{9 \times 1},$$

de donde podemos escribir

$$\nabla \mathbf{u}|_T = [\mathbf{DP}][\mathbf{u}]$$

donde

$$[\mathbf{DP}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{DP}] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{DP}] & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{DP}] \end{pmatrix}_{9 \times 12}$$

Sabemos que el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ es la matriz de 3×3 , simétrica, dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

o

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

Por su simetría, podemos reescribirla como un vector de \mathbb{R}^6 de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}_{6 \times 1} = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ \partial_2 u_2 \\ \partial_3 u_3 \\ \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \\ \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1 \\ \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2 \end{pmatrix}_{6 \times 1}$$

Así,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = [\mathbf{D}][\mathbf{DP}][\mathbf{u}]$$

Donde $[\mathbf{D}]$ es la matriz dada por

$$[\mathbf{D}] := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{6 \times 9},$$

Por otro lado, el tensor de esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$, es una matriz simétrica de 3 x 3 dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij}(\mathbf{u}))_{1 \leq i, j \leq 3},$$

la cual, debido a su simetría, se puede identificar como un vector de \mathbb{R}^5 de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{22}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{33}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{12}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{13}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{23}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

Recordemos que el tensor esfuerzo lo podemos expresar como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

donde λ y μ son los Parámetros de Lamé, δ es el Delta de Kronecker (1 cuando $i = j$, 0 cuando $i \neq j$) y ε_{kk} representa la dilatación cúbica (Δ).

Luego, tenemos la identidad

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = [\mathbf{E}] \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{22}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{33}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{12}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{13}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{23}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

Donde

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

De todo lo anterior se obtiene que podemos reescribir (3.15):

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_T &= \int_T \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \\
&= \int_T [\mathbf{E}][\mathbf{D}][\mathbf{DP}][\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{D}][\mathbf{DP}][\mathbf{v}] dx \\
&= [\mathbf{v}]^T \left(\int_T [\mathbf{DP}]_{12 \times 9}^T [\mathbf{D}]_{9 \times 6}^T [\mathbf{E}]_{6 \times 6} [\mathbf{D}]_{6 \times 9} [\mathbf{DP}]_{9 \times 12} dx \right) [\mathbf{u}] \\
&= [\mathbf{v}]^T \left(\int_{\hat{T}} [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}]_{12 \times 9}^T [\mathbf{B}]_{9 \times 9}^{-1} [\mathbf{D}]_{9 \times 6}^T [\mathbf{E}]_{6 \times 6} [\mathbf{D}]_{6 \times 9} [\mathbf{B}]_{9 \times 9}^{-T} [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}]_{9 \times 12} |J_{\mathcal{F}}| d\hat{x} \right) [\mathbf{u}]
\end{aligned}$$

donde $[\mathbf{B}]^{-1}$ es la matriz de $\mathbb{R}^{9 \times 9}$ dada por

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}_{9 \times 9}$$

Así la matriz elemental $K_T \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$, está dada por:

$$K_T := \int_{\hat{T}} [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}]_{12 \times 9}^T [\mathbf{B}]_{9 \times 9}^{-1} [\mathbf{D}]_{9 \times 6}^T [\mathbf{E}]_{6 \times 6} [\mathbf{D}]_{6 \times 9} [\mathbf{B}]_{9 \times 9}^{-T} [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}]_{9 \times 12} |J_{\mathcal{F}}| d\hat{x} \quad (3.20)$$

Vector de Fuerza Elemental F_T

En este desarrollo supondremos, sólo por simplicidad, que la función $\mathbf{g} = 0$. Para el miembro derecho de la ecuación 3.15 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx &= \int_T [\mathbf{P}][\mathbf{f}][\mathbf{P}][\mathbf{v}] dx \\
&= \int_{\hat{T}} [\hat{\mathbf{P}}][\mathbf{f}][\hat{\mathbf{P}}][\mathbf{v}] |J_{\mathcal{F}}| d\hat{x} \\
&= [\mathbf{v}]^T \left(\int_{\hat{T}} [\hat{\mathbf{P}}]_{12 \times 3}^T [\hat{\mathbf{P}}]_{3 \times 12} [\mathbf{f}]_{12 \times 1} |J_{\mathcal{F}}| d\hat{x} \right) \\
&= [\mathbf{v}]^T \mathbf{F}_T,
\end{aligned}$$

Donde el vector de carga elemental \mathbf{F}_T está dado por

$$\mathbf{F}_T := \int_{\hat{T}} [\hat{\mathbf{P}}]_{12 \times 3}^T [\hat{\mathbf{P}}]_{3 \times 12} [\mathbf{f}]_{12 \times 1} |J_{\mathcal{F}}| d\hat{\mathbf{x}} \quad (3.21)$$

3.5.6. Malla de Elementos Finitos

Para esta última parte de la sección sobre la implementación de elementos finitos, supondremos un espacio en dos dimensiones, ya que esto nos facilitará la escritura y además, el desarrollo es homólogo al caso en tres dimensiones. Para el lector resultará fácil deducir, a partir del caso 2D, lo que sucede en un espacio 3D.

Consideremos la siguiente malla (triangulación) bidimensional de $\bar{\Omega}$:

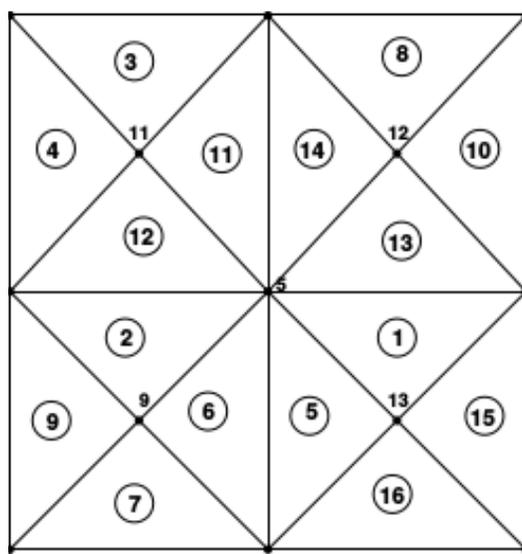


Figura 3.4: Ejemplo de una malla bidimensional con 16 elementos y 13 nodos.

Esta malla define la siguiente estructura de datos:

coordenadas(1:2,1:nodos) (arreglo real):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	0.0	1.0	1.0	0.0	0.5	0.0	0.5	0.5	0.25	1.0	0.25	0.75	0.75
y	0.0	0.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.0	1.0	0.25	0.5	0.75	0.75	0.25

conectividad(1:3,1:nelem) (arreglo entero):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
nodo 1	5	9	11	4	13	5	1	12	6	10	5	6	5	8	2	7
nodo 2	13	5	8	6	5	9	7	3	1	3	8	5	10	5	10	2
nodo 3	10	6	4	11	7	7	9	8	9	12	11	11	12	12	13	13

refnodo (1:nodos) (arreglo entero):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Referencia	1	1	2	2	0	2	1	2	0	1	0	0	0

refele (1:nelem) (arreglo entero):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Referencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

donde nnodos es el número total de nodos de la malla y nelem es el número total de elementos de la malla.

Matriz de Rigidez: Ensamble

Para un elemento arbitrario $T \in \mathcal{T}_h$ de la triangulación y sea $\mathbf{K}_T = (k_{ij}^T), i, j = 1, \dots, 6$ la matriz de rigidez elemental para el caso bidimensional análoga a (4.25) (para el caso 3D $i, j = 1, \dots, 12$). A partir de estas matrices elementales se debe ensamblar la matriz global de rigidez \mathbf{K} .

Notar que para el caso bidimensional, por cada nodo, habrán dos incógnitas asociadas (grados de libertad), que representan las componentes del desplazamiento. Para el caso 3D, serían tres las componentes asociadas a estos desplazamientos. A continuación daremos un ejemplo del proceso de ensamblado, es decir cómo las matrices locales \mathbf{K}_T contribuyen a formar la matriz global \mathbf{K} . Suponiendo que se desconoce el desplazamiento en todos los nodos, podemos fabricar el siguiente vector, que asocia el número del nodo con el número de ecuaciones:

nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ecuación 1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
ecuación 2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26

A modo de ejemplo, usaremos el triángulo número 4, de vértices 4, 6 y 11, respectivamente. Ya que este elemento tiene tres nodos y por cada nodo hay dos incógnitas, tenemos el siguiente arreglo local, que relaciona los números de ecuaciones locales con su contraparte global

ecuación local	1	2	3	4	5	6
ecuación global	7	11	21	8	12	22

Donde las ecuaciones 1 a 3 representan el número de la primera incógnita asociada a la nodos 4, 6 y 11. Equivalentemente, las ecuaciones 4 a 6 son el número de la segunda incógnita asociada a los mismo nodos. Esto está en concordancia con la forma de contruir el vector $[\mathbf{u}]$.

Siguiendo con nuestro ejemplo, sea \mathbf{K}_{T_4} la matriz elemental asociada al elemento T_4 , es decir:

$$\mathbf{K}_{T_4} = \begin{pmatrix} k_{11}^4 & k_{12}^4 & k_{13}^4 & k_{14}^4 & k_{15}^4 & k_{16}^4 \\ k_{21}^4 & k_{22}^4 & k_{23}^4 & k_{24}^4 & k_{25}^4 & k_{26}^4 \\ k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^4 & k_{34}^4 & k_{35}^4 & k_{36}^4 \\ k_{41}^4 & k_{42}^4 & k_{43}^4 & k_{44}^4 & k_{45}^4 & k_{46}^4 \\ k_{51}^4 & k_{52}^4 & k_{53}^4 & k_{54}^4 & k_{55}^4 & k_{56}^4 \\ k_{61}^4 & k_{62}^4 & k_{63}^4 & k_{64}^4 & k_{65}^4 & k_{66}^4 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Usando la numeración local-global de las ecuaciones asociadas al elemento T_4 , el ensamblado en la matriz global para la primera fila de la matriz local \mathbf{K}_{T_4} es:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{7,7} &\leftarrow \mathbf{K}_{7,7} + k_{11}^4 \\ \mathbf{K}_{7,11} &\leftarrow \mathbf{K}_{7,11} + k_{12}^4 \\ \mathbf{K}_{7,21} &\leftarrow \mathbf{K}_{7,21} + k_{13}^4 \\ \mathbf{K}_{7,8} &\leftarrow \mathbf{K}_{7,8} + k_{14}^4 \\ \mathbf{K}_{7,12} &\leftarrow \mathbf{K}_{7,12} + k_{15}^4 \\ \mathbf{K}_{7,22} &\leftarrow \mathbf{K}_{7,22} + k_{16}^4\end{aligned}$$

Igualmente para el ensamble en la matriz global de segunda fila de \mathbf{K}_{T_4} :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11,7} &\leftarrow \mathbf{K}_{11,7} + k_{21}^4 \\ \mathbf{K}_{11,11} &\leftarrow \mathbf{K}_{11,11} + k_{22}^4 \\ \mathbf{K}_{11,21} &\leftarrow \mathbf{K}_{11,21} + k_{23}^4 \\ \mathbf{K}_{11,8} &\leftarrow \mathbf{K}_{11,8} + k_{24}^4 \\ \mathbf{K}_{11,12} &\leftarrow \mathbf{K}_{11,12} + k_{25}^4 \\ \mathbf{K}_{11,22} &\leftarrow \mathbf{K}_{11,22} + k_{26}^4\end{aligned}$$

El resto de las filas de la matriz \mathbf{K}_{T_4} se ensamblan siguiendo el mismo procedimiento.

Matriz de Rigidez: Almacenamiento

Luego de ensamblar las matrices locales de todos los elementos de la malla, obtendremos una matriz global \mathbf{K} , que será un arreglo de $2 \cdot n_{\text{nodos}} \times 2 \cdot n_{\text{nodos}}$. Sin embargo, debido a la naturaleza *sparse* de la matriz global, no es conveniente almacenar todos los elementos, pues se pierde demasiada memoria. Es por esto que sólo se almacenan los elementos no nulos de la matriz, utilizando el llamado almacenamiento *Morse* (CRS, en inglés).

En una estructura tipo Morse, una matriz \mathbf{K} de $n \times n$ se almacena definiendo tres arreglos:

- * $row(1 : n + 1)$ (entero): Donde se guarda el número de elementos no nulos de cada fila de la matriz. En este arreglo se define $row(1) = 1$ y $row(i + 1)$ de modo que $row(i + 1) - row(i)$ sea el número de elementos no nulos de la fila i .

- * $column(1 : nzero)(entero)$: Contiene los índices de las columnas de los elementos no nulos. Por convención, se ordena en forma creciente para los índices de las columnas de una fila dada.
- * $aa(1 : nzero)$ (entero): Donde se almacenan los elementos no nulos de la matriz.

Por ejemplo, para una matriz \mathbf{K} de 5×5 :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 2,0 & 0,0 \\ 3,0 & 4,0 & 0,0 & 5,0 & 0,0 \\ 6,0 & 0,0 & 7,0 & 8,0 & 9,0 \\ 0,0 & 0,0 & 10,0 & 11,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 12,0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Esta matriz, bajo los arreglos generados por el formato Morse son:

$$\begin{aligned} aa & : 1,0 \ 2,0 \ 3,0 \ 4,0 \ 5,0 \ 6,0 \ 7,0 \ 8,0 \ 9,0 \ 10,0 \ 11,0 \ 12,0 \\ column & : 1 \ 4 \ 1 \ 2 \ 4 \ 1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 3 \ 4 \ 5 \\ row & : 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 12 \ 13 \end{aligned}$$

Ensamble del Vector de Fuerza Elemental

El ensamblado para el vector de fuerza global \mathbf{F} , a partir de los vectores de fuerza local \mathbf{F}_T , es similar al ensamblado para la matriz de rigidez \mathbf{K} . Para ejemplificar esto, tomemos nuevamente el elemento número 4, de vértices 4, 6 y 11.

$$\mathbf{F}_{T_4} = \begin{pmatrix} f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \\ f_4^4 \\ f_5^4 \\ f_6^4 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Usando la numeración local-global de las ecuaciones de T_4 obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_7 &\leftarrow \mathbf{F}_7 + f_1^4 \\ \mathbf{F}_{11} &\leftarrow \mathbf{F}_{11} + f_2^4 \\ \mathbf{F}_{21} &\leftarrow \mathbf{F}_{21} + f_3^4 \\ \mathbf{F}_8 &\leftarrow \mathbf{F}_8 + f_4^4 \\ \mathbf{F}_{12} &\leftarrow \mathbf{F}_{12} + f_5^4 \\ \mathbf{F}_{22} &\leftarrow \mathbf{F}_{22} + f_6^4 \end{aligned}$$

3.5.7. Imposición de las Condiciones de Frontera

Luego de haber ensamblado la matriz de rigidez \mathbf{K} y el vector de fuerza \mathbf{F} sólo nos queda resolver el siguiente sistema lineal:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.25)$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & k_{n4} & k_{n5} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Hasta ahora hemos considerado que todos los nodos son incógnitas, lo cual no es efectivo, ya que de antemano se conocen los valores sobre la frontera de Dirichlet Γ_D . Ahora, supongamos que conocemos el valor de la primera componente de \mathbf{u} en el nodo 1, esto es $u_1 = u_D$. Esta condición se impone de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & k_{n4} & k_{n5} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_D \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

La principal desventaja de este método para imponer las condición de frontera es que se pierde la simetría de la matriz \mathbf{K} , en el caso de que sea simétrica.

3.5.8. Solución del Sistema Lineal

Para resolver el sistema lineal global (3.25), que genera la aplicación del método de elementos finitos, se puede escoger entre los métodos directos y los métodos iterativos. En particular, para nuestro caso se utiliza el método directo LU, que viene provisto en el solucionador *PARDISO*, incluido en la bibliotec *MKL*, adjunta al compilador *ifort* de *FORTRAN* (*Intel*).

Capítulo 4

Aplicación del Método de Elementos Finitos para Deformación Co-eruptiva del CVPCC 2011

En este capítulo trataremos sobre como se definieron algunos parámetros que caracterizan la deformación superficial en el proceso co-eruptivo del CVPCC 2011. En particular, los principales elementos que gobiernan nuestros modelos de elementos finitos son las condiciones de borde y las mallas sobre las cuales se calculan las soluciones.

4.1. Mallas

Básicamente, en este estudio se trabajó con dos tipos de mallas: una estratificada y una homogénea. Con esto, se busca ver la diferencia entre las soluciones de ambos casos. Como se dijo anteriormente, uno de los objetivos de este trabajo es testear cómo puede afectar las condiciones de *Mogi (1958)* (considerar el medio como un semi-espacio infinito, sólido de Poisson, homogéneo e isótropo) en las soluciones de este tipo de modelos.

Se consideró un dominio de 200x200x100 km (100 kilómetros de profundidad), ya

que se estimó una distancia suficiente para asumir el desplazamiento, debido a los cambios de presión de las esferas, como nulo en estos límites (Condición de Dirichlet). La figura 4.1 muestra las dos distintas malla creadas; a la izquierda se muestra una malla homogénea, mientras que al lado derecho se puede observar la malla estratificada (las profundidades de cada capa están dadas por la tabla 5.1). Se restringió el volumen máximo de cada elemento a 3 unidades cúbicas, para obtener una mejor resolución. Los resultados que dan cada una de las mallas se discutirá más extensamente en el siguiente capítulo.

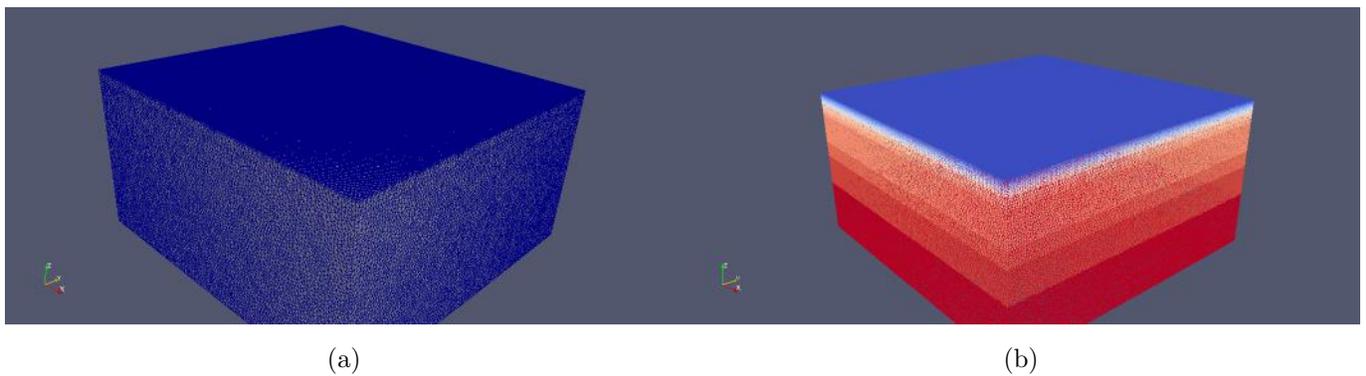


Figura 4.1: Muestra dos mallas distintas: (a) una malla homogénea y (b) una malla estratificada.

Esferas inmersas en el medio

Otro componente importante, dentro de nuestros modelos, son las esferas. Estas esferas se forman de la unión de los elementos y representan la cámara magmática. Ya que la formación de las esferas se hacen en base a la unión de elementos, se torna imposible crear una esfera perfecta (redonda). En este sentido, es fundamental la elección de la cantidad de nodos que conformarán la esfera, entre más elementos tenga ésta, más se parecerá a una esfera real. La figura 4.2 muestra 4 esferas distintas - creadas con ayuda del programa *Meshlab* - que ilustra lo descrito anteriormente.

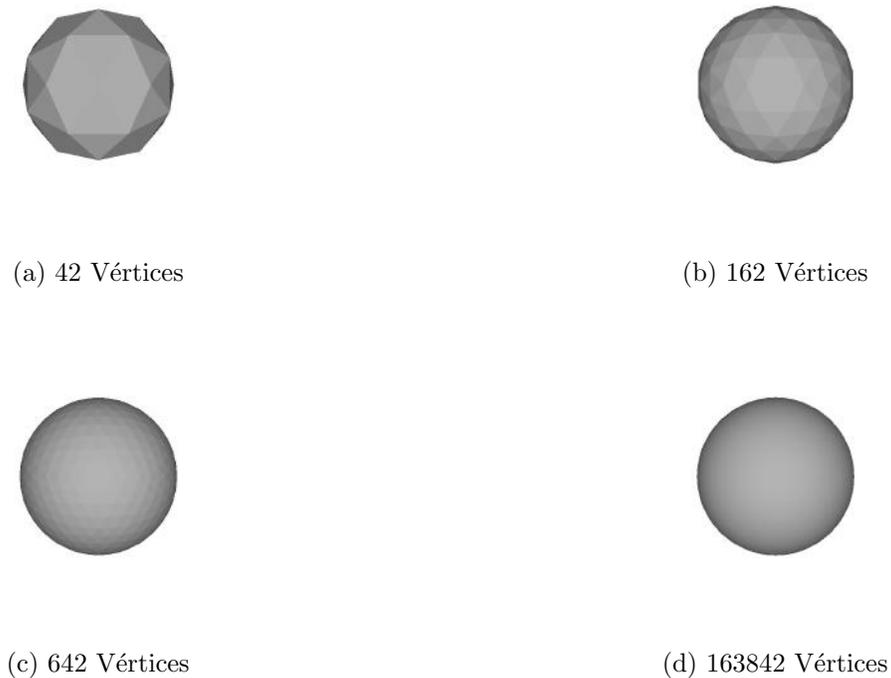
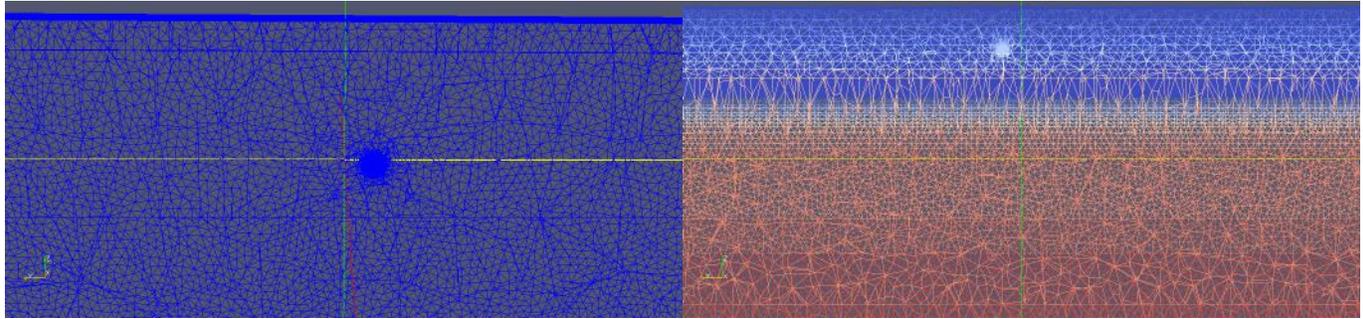


Figura 4.2: Cuatro esferas distintas compuestas de diferentes cantidades de vértices y caras.

Para este trabajo, se eligió esferas con 163842 vértices y 327680 caras ((d) en figura 4.2). Esta elección es en base a algunos test que se hicieron y a las capacidades del computador con el cual se trabajó. La esfera con mayor resolución, mostró un una solución más estable y suave que las demás.

La figura 4.3 muestra como se ve una esfera (de 163842 vértices) inserta en los distintos tipos de mallas.



(a) Malla Homogénea

(b) Malla Estratificada

Figura 4.3: Corte transversal de mallas que contienen una esfera. (a) Una esfera inserta en una malla homogénea y (b) una dentro de un medio estratificado.

4.2. Condiciones de Borde

Las condiciones de borde que definen nuestro problema están determinadas en los límites de nuestra malla. Lo primero que supondremos es que el desplazamiento en los bordes laterales e inferior de nuestra malla será nulo (Condición de Dirichlet), mientras que la cara superior queda libre. Nuestra segunda condición de borde estará determinada por un cambio de presión (y de volumen) en las paredes de la esfera que está sumergida en el medio (Condición de Neumann). Y también se consideran fuerzas volumétricas nulas. Así, nuestro problema modelo podría escribirse como:

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{en } \Gamma_N \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzo, \mathbf{u} representa el desplazamiento y \mathbf{n} es el campo de vectores normales a la superficie Γ_N . Por otro lado, Ω representa nuestro dominio (malla), Γ_D son los límites laterales e inferior, donde se impone un desplazamiento nulo y Γ_N simboliza los bordes de nuestra esfera, que también constituyen un borde de nuestro dominio.

Capítulo 5

Resultados y Análisis

5.1. Comparando Solución Analítica y Numérica Sintéticamente y Validación del Método de Elementos Finitos

En esta sección compararemos la solución analítica de *Mogi (1958)* con una solución análoga calculada con el método de los elementos finitos. Con esto queremos discutir las similitudes (o diferencias) que puedan tener ambas soluciones. Además, se presentará un modelo estratificado que se propone como más realista que los dos descritos anteriormente.

5.1.1. Definiendo Parámetros Elásticos y Resultados Analíticos

Con la finalidad de conocer qué rol podría jugar un modelo de velocidades de ondas sísmicas en la solución de nuestro modelo FEM, se construirán dos soluciones distintas basándose en 2 modelos distintos de velocidades y se compararán con una solución analítica tipo *Mogi (1958)*. Primero, definiremos una solución asumiendo que μ y λ son iguales y constantes para todo el medio, simulando así el modelo analítico de *Mogi (1958)*. Luego, se generará una segunda solución que será determinada por un modelo de velocidades de ondas sísmicas local, creado en el marco de la tesis doctoral de *Da-*

niel Basualto, utilizado por *Wendt et al. (2016)* y presentado por *Basualto et al. (en preparación)*(tabla 5.1).

Para calcular la solución analítica con la que compararemos nuestros modelos FEM definiremos $\mu = 2,6112 \times 10^{10} Pa$ (y $\lambda = \mu$). Este valor de μ sale asumiendo una velocidad de la onda S de $3200 \frac{m}{s}$, una densidad de la roca de $2550 \frac{kg}{m^3}$ y la relación de *Birch (1960)*:

$$\mu = \rho V_S^2 \quad (5.1)$$

Además, asumiremos que la cámara tiene un radio de $0,4km$, una profundidad de $5km$ y el cambio volumétrico de la cámara será de $-0,163 km^3$. El radio de la cámara se definió luego de hacer test con varios radios distintos. Las soluciones con esferas mayores o iguales a $0,4km$ fueron estables y suaves, se eligió la menor de esta de manera que se pareciera más a la solución analítica de *Mogi (1958)*. La profundidad se escogió porque esta ($5km$) es la profundidad donde se encuentra la esfera de mayor cambio de volumen y que generará los mayores desplazamientos. Mientras que el cambio volumétrico es el mayor que ocuparemos en nuestros modelos.

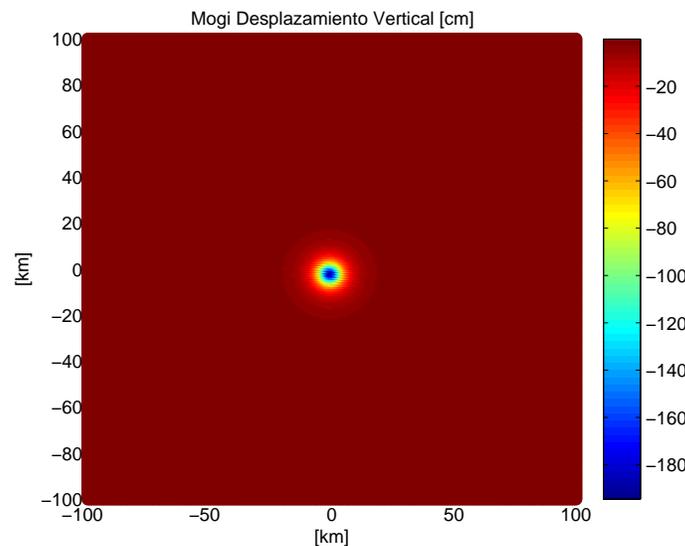


Figura 5.1: Desplazamiento vertical en superficie de nuestra solución analítica Mogi.

Las figuras 5.1 y 5.2 muestran un mapa de los desplazamientos en superficie que se obtienen de la Solución de *Mogi (1958)* con los parámetros antes mencionados. La figura 5.1 muestra la magnitud del desplazamiento, en centímetros, en la componente vertical, mientras que la figura 5.2 nos ilustra la componente radial del desplazamiento.

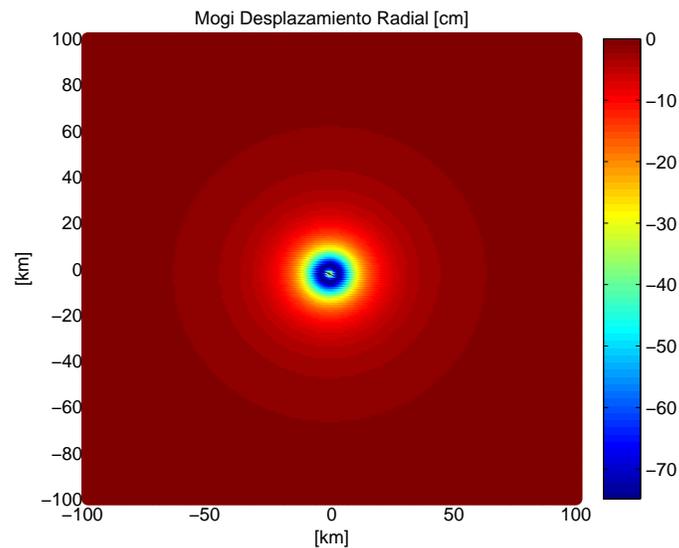


Figura 5.2: Desplazamiento radial en superficie de nuestra solución analítica Mogi.

Para seguir esbozando el desplazamiento resultante de nuestra Solución *Mogi (1958)*, la figura 5.3 muestra un perfil de las magnitudes radial y vertical desde el origen (punto sobre el centro de la cámara) hasta los 100 kilómetros de distancia (borde de nuestro modelo FEM). Cabe recordar que esta solución es simétrica, así que será igual para cualquier punto equidistante del centro de la cámara.

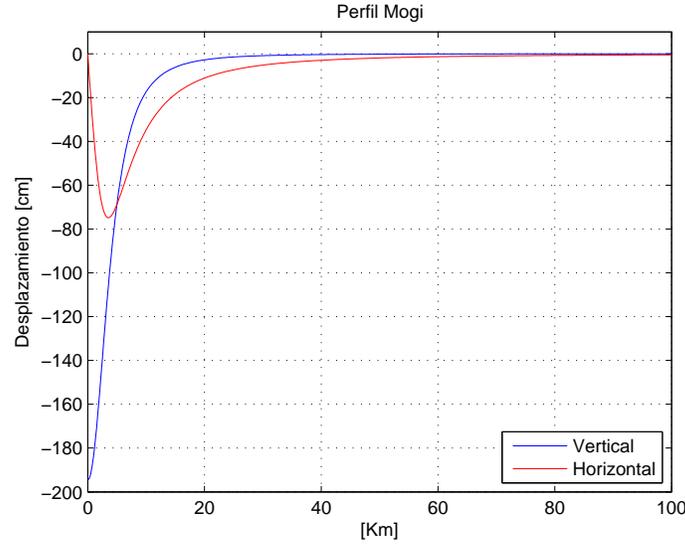


Figura 5.3: Perfiles de los desplazamientos radial y vertical de la solución Mogi.

5.1.2. Mogi vs FEM-Homogéneo

Ahora que ya definimos la solución analítica *Mogi (1958)*, trataremos de simular esta solución utilizando elementos finitos. Entonces, esta nueva solución se construirá a partir de los mismos parámetros mencionados anteriormente (cambio volumétrico, radio y Parámetros de Lamé con los que se calculó la solución analítica).

El cambio de presión necesario para generar este cambio de volumen ($-0,163 \text{ km}^3$) bajo estas condiciones elásticas del medio es de $-2,6461e + 10 \text{ Pa}$. Este valor resulta de la relación de *Masterlack (2007)*:

$$\Delta V \frac{(1 - \nu)(1 + \nu)}{2\pi(1 - 2\nu)} = \Delta P(1 - \nu) \frac{r^3}{\mu} \quad (5.2)$$

Donde ΔP es la diferencia de presión, ΔV en la diferencia de volumen, ν es el Coeficiente de Poisson, para el caso de un Sólido de Poisson $\nu = 0,25$, μ es el Segundo Parámetro de Lamé y r el radio de la esfera.

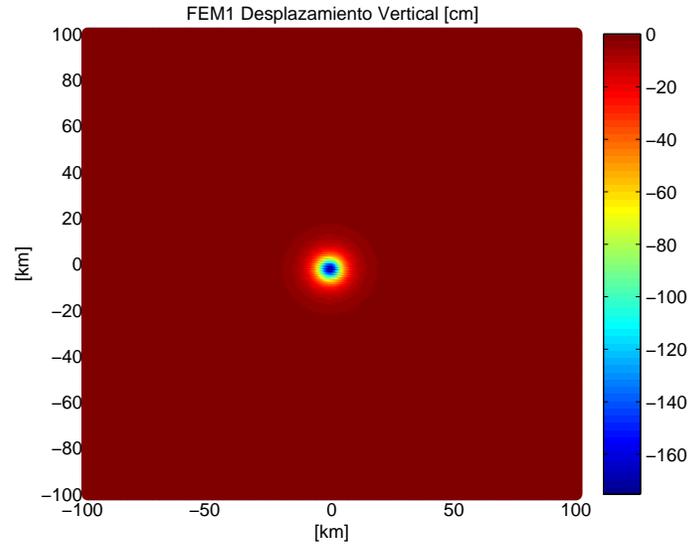


Figura 5.4: Desplazamiento vertical en superficie de nuestra solución FEM-Homogéneo.

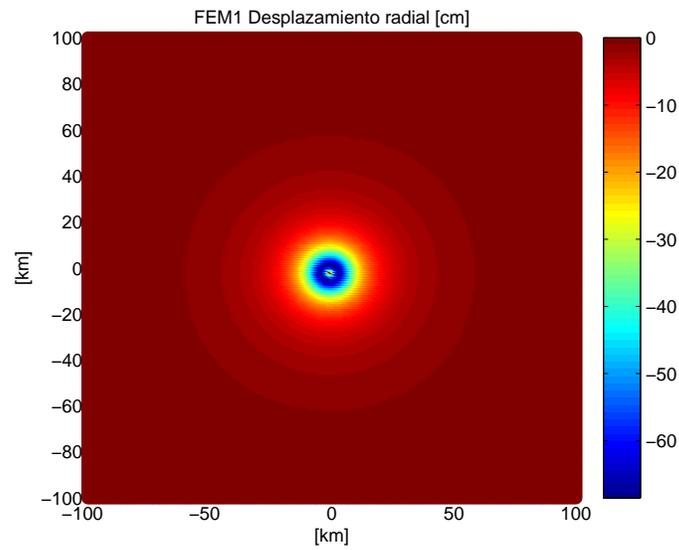


Figura 5.5: Desplazamiento radial en superficie de nuestra solución FEM-Homogéneo.

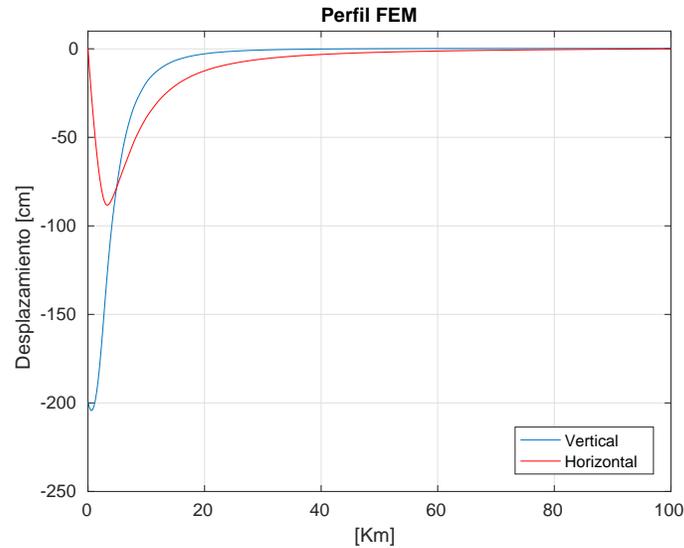


Figura 5.6: Perfil de los desplazamientos radial y vertical de la solución FEM-Homogéneo.

Análogamente a como lo hicimos para el caso analítico, ilustramos los desplazamientos de la solución FEM-Homogénea en las imágenes 5.4, 5.5 y 5.6. Las 2 primeras imágenes mencionadas anteriormente corresponden a un mapa de los desplazamientos vertical y radial en superficie, mientras que la imagen 5.6 corresponde a un perfil de los desplazamientos desde el origen hasta los 100 kilómetros de distancia.

Para ver las diferencias entre la solución analítica y la solución FEM-Homogénea, las figuras 5.7 y 5.8 compara los perfiles vertical y radial, respectivamente, de ambos resultados. En estas figuras podemos apreciar que las soluciones se parecen mucho en su forma, sin embargo difieren en sus amplitudes máximas. Sus amplitudes distan de aproximadamente 15cm y 10cm en la vertical y horizontal, respectivamente. Estas diferencias son medibles con InSAR y podrían hacerse importante cuando tratamos de modelar algún fenómeno como la deformación superficial debido al cambio de presión en una cámara magmática, sobre todo si queremos discutir la magnitud de este cambio presión (o de volumen).

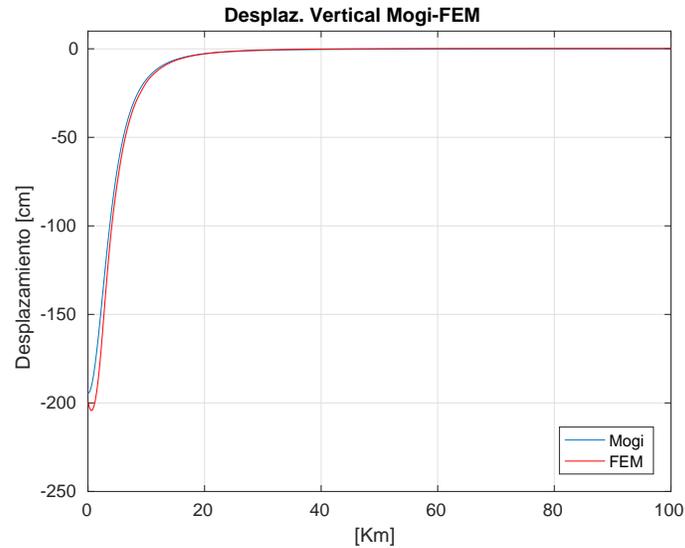


Figura 5.7: Perfiles verticales de las soluciones Mogi y FEM-Homogéneo.

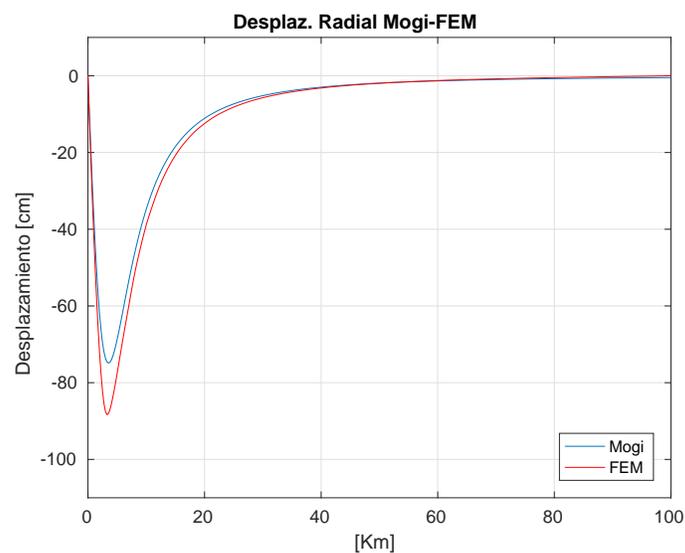


Figura 5.8: Perfiles radiales de las soluciones Mogi y FEM-Homogéneo.

5.1.3. Mogi vs FEM-Estratificado

Ahora compararemos nuestra solución *Mogi* (1958) con una solución FEM Cconstruida a partir de un modelo de velocidades de ondas sísmicas local. Los datos de este modelo se encuentran en la tabla 5.1. Con estos valores de las velocidades de ondas P y S, la ecuación 5.1 y otra relación de *Birch* (1960):

$$\lambda = \rho(V_P^2 - 2V_S^2) \quad (5.3)$$

Podemos definir los parámetros elásticos para cada estrato de nuestro dominio. La tabla 5.2 muestra los valores de los Parámetros de Lamé para cada estrato de nuestra malla.

Vp Velest [$\frac{Km}{s}$]	Vs Velest [$\frac{Km}{s}$]	Profundidad [Km]
4.90	2.75	0.5
5.05	2.84	1.5
5.10	2.87	2.5
5.15	2.89	3.5
6.05	3.40	4.5
6.38	3.58	5.5
6.46	3.63	6.5
6.47	3.63	7.5
6.50	3.65	8.5
6.60	3.71	12.0
6.70	3.76	15.0
6.90	3.88	35.0
7.00	3.93	45.0
7.30	4.10	65.0

Tabla 5.1: Tabla de valores de velocidades para ondas P y S en el CVCC, según modelo local.

λ [$10^{10} Pa$]	μ [$10^{10} Pa$]	Profundidad [Km]	ν
2.2656750	1.9284375	0.5	0.2701
2.3896815	2.0567280	1.5	0.2687
2.4317310	2.1004095	2.5	0.2683
2.5036665	2.1297855	3.5	0.2702
3.4380375	2.9478000	4.5	0.2692
3.8432580	3.2681820	5.5	0.2702
3.9213390	3.3601095	6.5	0.2693
3.9543105	3.3601095	7.5	0.2703
3.9792750	3.3972375	8.5	0.2697
4.0881090	3.5098455	12.0	0.2690
4.2367740	3.6050880	15.0	0.2701
4.4628060	3.8388720	35.0	0.2688
4.6181010	3.9384495	45.0	0.2699
5.0158500	4.2865500	65.0	0.2696

Tabla 5.2: Tabla de valores para los Parámetros de Lamé, derivados de la tabla 5.1.

Ahora, con nuestros Parámetros de Lamé definidos, podemos crear una malla que nos recree un medio estratificado con estos valores elásticos. La figura 5.9 muestra la malla que usaremos para calcular esta solución. En esta malla podemos ver 15 estratos, 14 están representados en la tabla 5.2, mientras que el número 15 es una “última capa” que va desde el último límite del modelo de velocidades (65 Km) hasta los 100 kilómetros, esto para evitar problemas de borde.

Ocupando (5.2) y los parámetros para la capa entre los 4,5 y 5,5 km , es necesario un cambio de presión de $-3,6615 \times 10^{10} Pa$ para generar el mismo cambio de volumen de los casos anteriores. La deformación en superficie resultante de esta solución se pueden ver en las figuras 5.10 y 5.11.

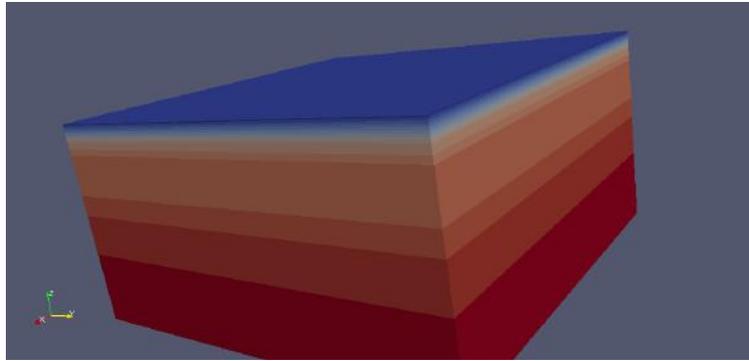


Figura 5.9: Dominio FEM-Estratificado.

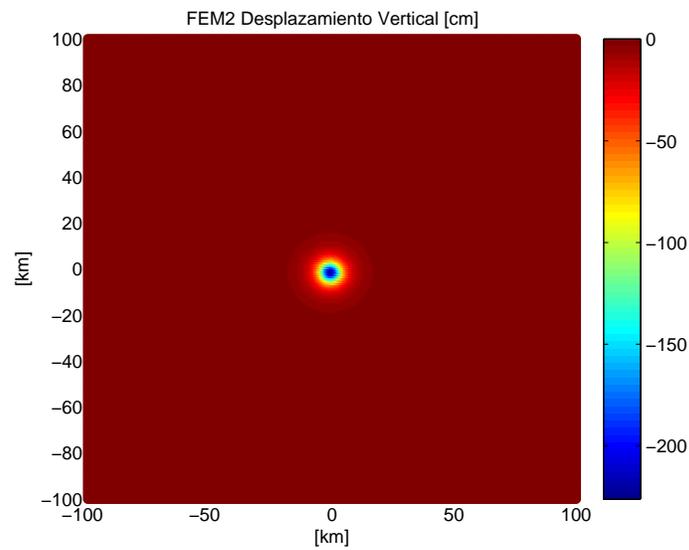


Figura 5.10: Desplazamiento vertical en superficie de nuestra solución FEM-Estratificado.

En las figuras 5.12 y 5.13 podemos ver una comparación entre los perfiles de la solución FEM con un dominio estratificado y la solución analítica de Mogi. Ambas soluciones se han calculado para el mismo cambio de volumen.

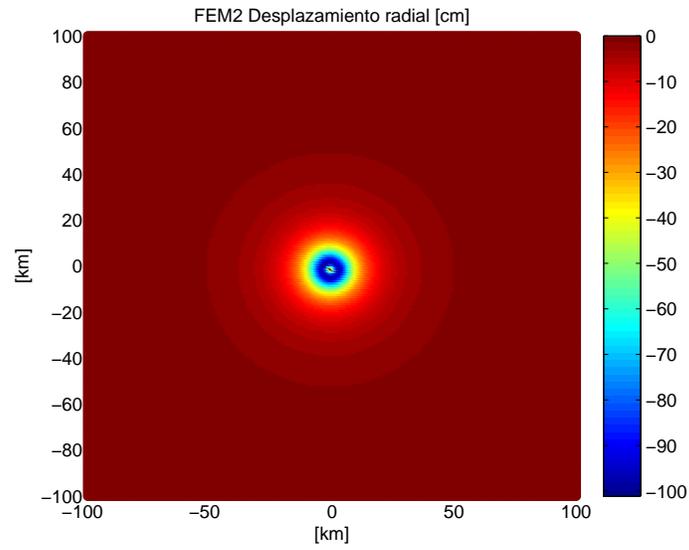


Figura 5.11: Desplazamiento Radial en superficie de nuestra solución FEM-Estratificado.

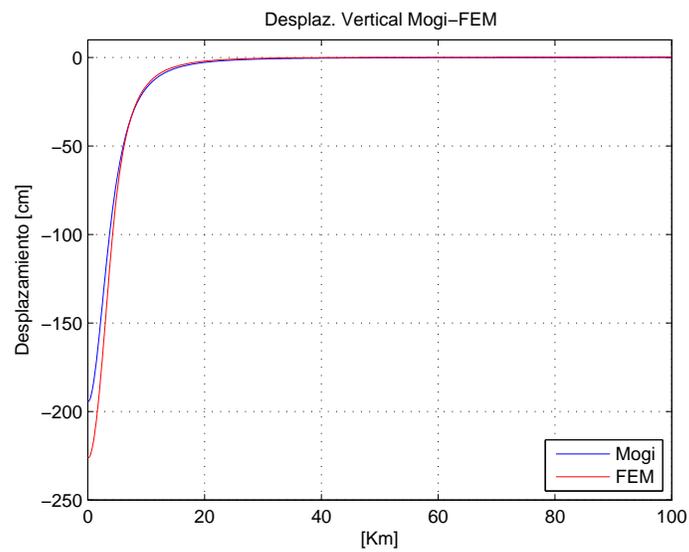


Figura 5.12: Perfiles verticales de las soluciones Mogi y FEM-Estratificado.

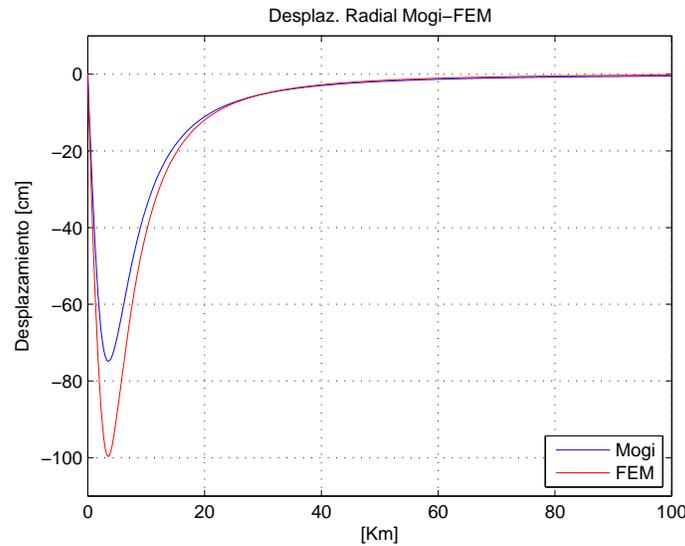


Figura 5.13: Perfiles radiales de las soluciones Mogi y FEM-Estratificado.

De las imágenes anteriores nos podemos dar cuenta que la solución FEM, calculada para un mismo cambio de volumen, puede variar mucho si hacemos variar los parámetros elásticos. De las figuras 5.12 y 5.13, podemos observar diferencias entre un modelo y otro de aproximadamente 25cm . Esto es totalmente sensible a mediciones de tipo InSAR (o GPS, por ejemplo) y por lo tanto, puede tornarse muy significativo en la confección de un modelo.

En el caso de nuestro modelo FEM-Estratificado, las amplitudes del desplazamiento en superficie son mucho mayores a las que podemos observar en la solución analítica de Mogi y también a las resultantes del FEM-Homogéneo (ver figuras 5.7 y 5.8). Esto podría suponer que si consideramos un medio estratificado, el cambio de volumen debería ser menor al que sugiere una solución con parámetros elásticos homogéneos y constantes para llegar a la misma deformación superficial. Dicho de otra forma, si quisiéramos simular una deformación superficial, tendríamos que asumir un cambio de volumen mayor en un medio homogéneo que en uno estratificado de esta manera.

5.2. Comparación Entre Datos InSAR Co-eruptivo del CVPCC 2011 y los Modelos Propuestos

Para evaluar la calidad del ajuste de estos modelos FEM a la realidad, se compararán soluciones generadas de éstos con datos InSAR disponibles para la zona de estudio. Se disponen de dos interferogramas para el tiempo de la erupción. El primero se tomó del 08-05-2011 al 07-06-2011 y el segundo entre el 07-06-2011 y el 07-07-2011.

La estructura de nuestros modelos está dada por la inversión realizada por *Wendt et al. (2016)*, que utilizó los datos InSAR que se muestran en este trabajo, además de las ecuaciones de *Mogi (1958)*. Según *Wendt et al. (2016)*, para el primer interferograma, los resultados de la inversión indican que la configuración que mejor se ajusta a los datos son dos cámaras, la primera se ubicada en los $734400mE$ y $5515400mN$ (*UTM 18 S*), con una profundidad de $3,5 Km$ y un cambio volumétrico de $-0,095 km^3$, mientras que la segunda cámara está ubicada en los $740600mE$ y $5504100mN$ (*UTM 18 S*), una profundidad de $4,05 km$ y un cambio de volumen de $-0,018 Km^3$. Estas fuentes son similares a las encontradas por *Jay et al. (2014)*.

Para el segundo interferograma, la inversión arroja una configuración con una cámara en $736080mE$, $5514190mN$ (*UTM18S*), una profundidad de $5 km$ y un cambio de volumen en la esfera de $-0,163 Km^3$.

En base a lo anterior, conformaremos dos modelos FEM, uno asumiendo que λ y μ son iguales y constantes para todo el medio, y un segundo modelo asumiendo la estructura de velocidades dada en la tabla 5.2.

5.2.1. Primer Interferograma

Nuestro primer interferograma es de gran interés, ya que involucra los primeros días de la erupción. La erupción más reciente del Cordón Caulle comenzó el 4 de junio del 2011, por lo que estos datos INSAR nos podrían dar una idea de la deformación sufrida

los 2 primeros días posterior al principio de la erupción. En la figura 5.14 se muestran los datos de desplazamientos, en dirección de la línea de visión del satélite, disponibles para el primer interferograma. Acá podemos apreciar desplazamientos que parecen ser concéntricos en torno a las dos fuentes resultantes de la inversión de *Wendt et al. (2016)* (cruces). Las deformaciones más importantes se observan al Noroeste, más cerca de la Cordillera Nevada, mientras que cerca del Puyehue se pueden ver desplazamientos menores y pareciera estar ligado a una fuente con un menor cambio volumétrico.

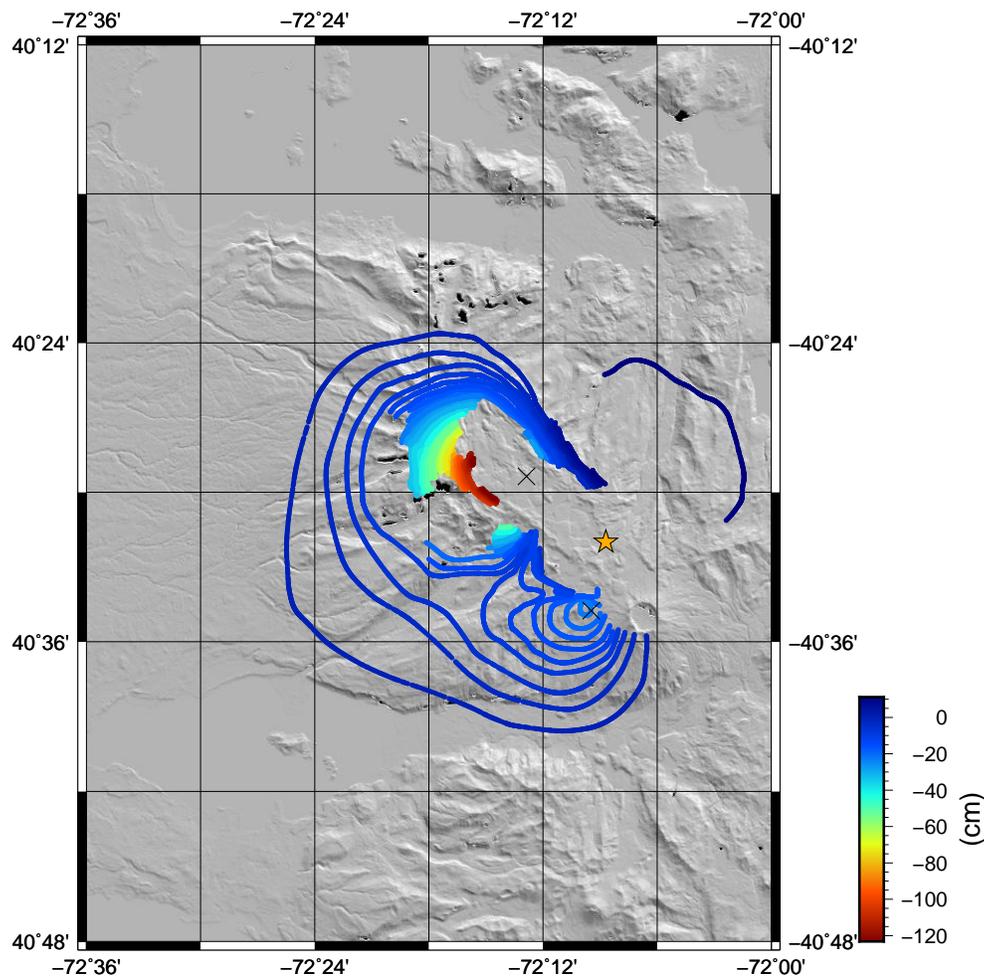


Figura 5.14: Desplazamientos en dirección LOS mostrada por el interferograma 1, en centímetros. La estrella amarilla representa el vent.

Como sabemos, las diferencias de posición de un punto que muestra un interferograma son en una sola dirección (dirección en la cual el satélite emite la onda), en la dirección LOS (line of sight). Es por esto que es vital, para poder comparar nuestra

solución con los datos InSar, proyectar nuestra solución en esta dirección.

Modelo FEM-Homogéneo

Si asumimos un medio homogéneo con $\mu = 2,6112 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ($\lambda = \mu$) y la configuración propuesta por *Wendt et al. (2016)* para el primer interferograma, la solución resultante del modelo FEM proyectada en la dirección LOS es la mostrada en la figura 5.15.

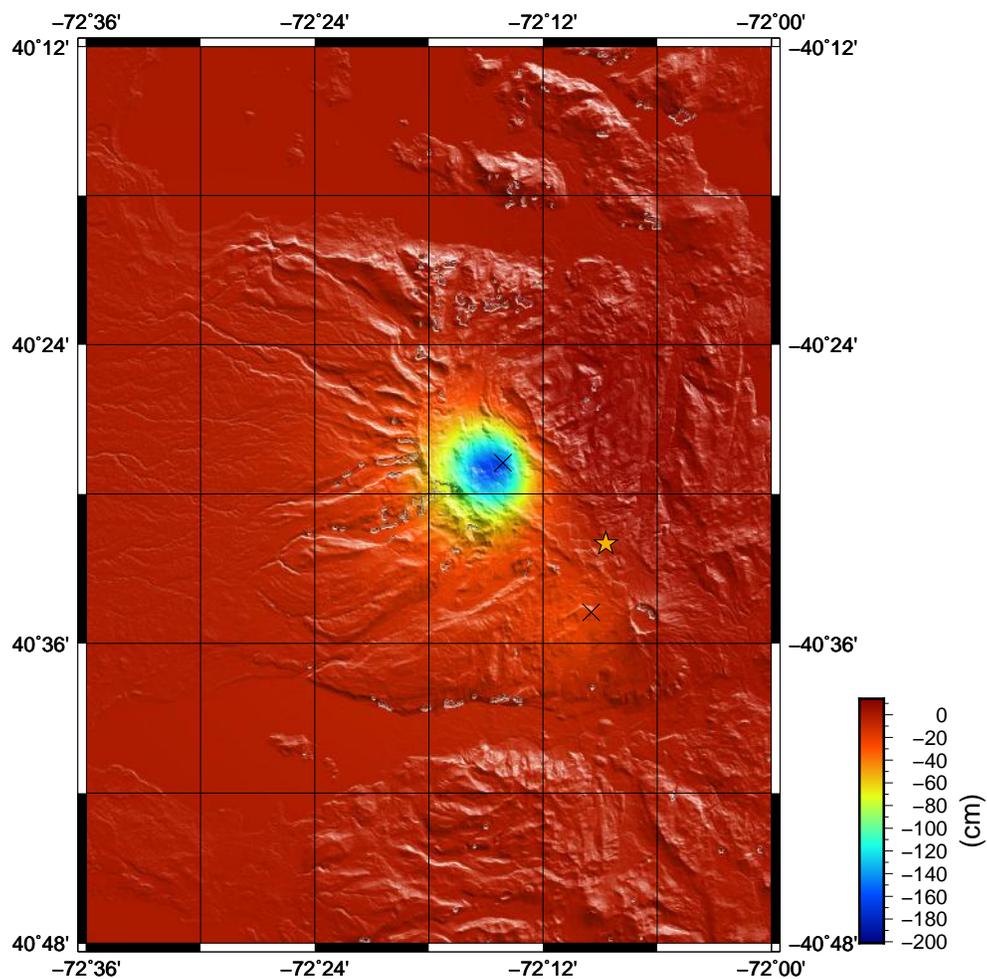


Figura 5.15: Solución del primer modelo FEM-Homogéneo proyectada sobre la línea de visión del satélite (LOS). Los desplazamientos se muestran en centímetros y las cruces representan las fuentes de la deformación.

En esta figura (5.15) se muestra, en centímetros, los desplazamientos calculados en superficie por nuestro modelo FEM-Homogéneo proyectada sobre la línea de visión del satélite. Las dos cruces negras representan la ubicación de las cámaras mágnicas obtenidas de la inversión de *Wendt et al. (2016)*.

Ahora, teniendo estos resultados, podemos comparar esta solución con el interferograma tomado entre 08-05-2011 y el 07-06-2011. Ya que muchos de los datos tomados por el satélite son poco fiables o se pierden, la información que entrega este interferograma es en una cantidad de puntos limitada (en los puntos donde la información es confiable, ver figura 5.14). Por lo tanto, la comparación entre el interferograma y nuestro modelo se hará solo para los puntos disponibles en el set de datos.

Este set de datos contiene 21.029 observaciones y la diferencia entre estas observaciones y la solución de nuestro primer modelo se puede observar en la figura 5.16.

Acá, podemos ver que las diferencias oscilan entre los $20cm$ y los $-20cm$, sin embargo las mayores diferencias se encuentran en lugares puntuales de la zona de interés. El rms de las diferencias es de $8,2891 cm$. En el desarrollo de este trabajo se calcularon los rms con la siguiente fórmula:

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

donde x es la diferencias entre el valor observado por el satélite y el valor que estima el modelo y n es el número de observaciones.

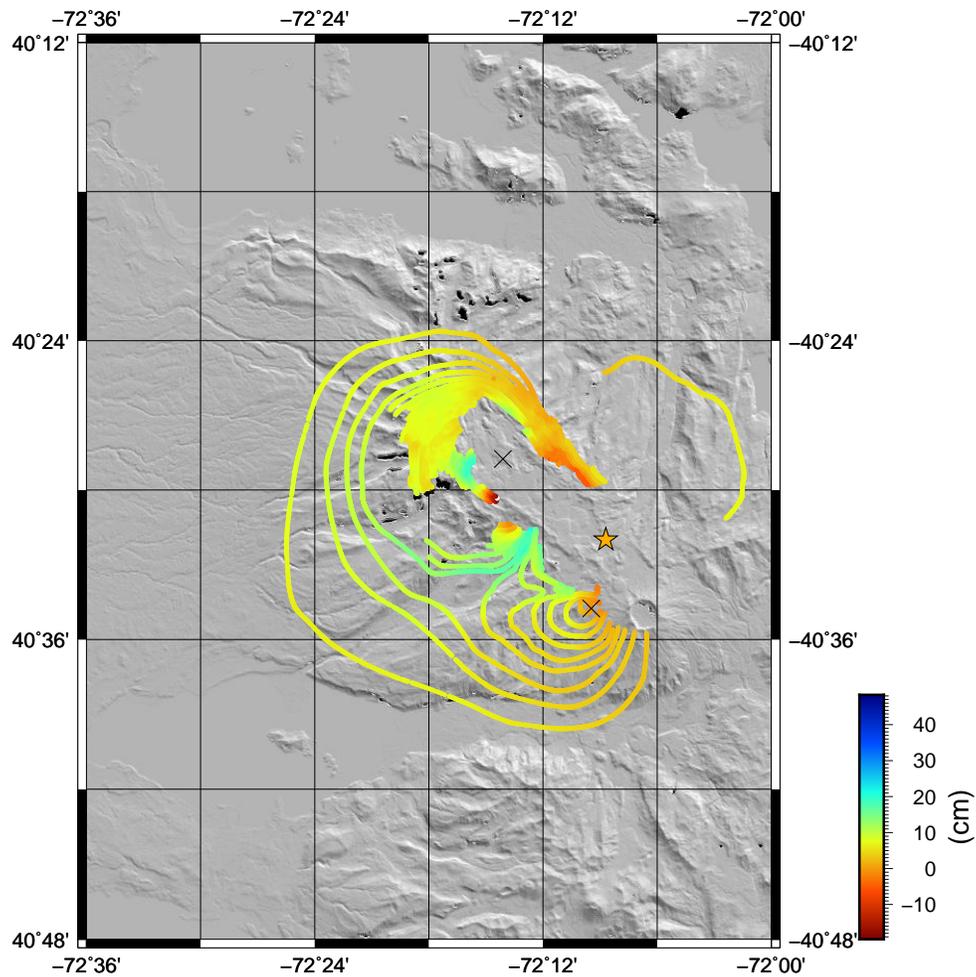


Figura 5.16: Diferencia entre el interferograma 1 y la solución resultante del Modelo-Homogéneo proyectada en el LOS. Las diferencias se muestran en centímetros y las cruces representan las ubicaciones de las fuentes.

Modelo FEM-Estratificado

Ahora, compararemos los datos del interferograma 1 con una solución generada por la misma configuración anterior pero para un medio estratificado según la tabla 5.2.

La figura 5.17 muestra la solución FEM generada por dos fuentes, con la misma ubicación y cambio volumétrico que para el caso del modelo FEM homogéneo anterior, proyectada sobre la línea de visión del satélite, para un medio estratificado.

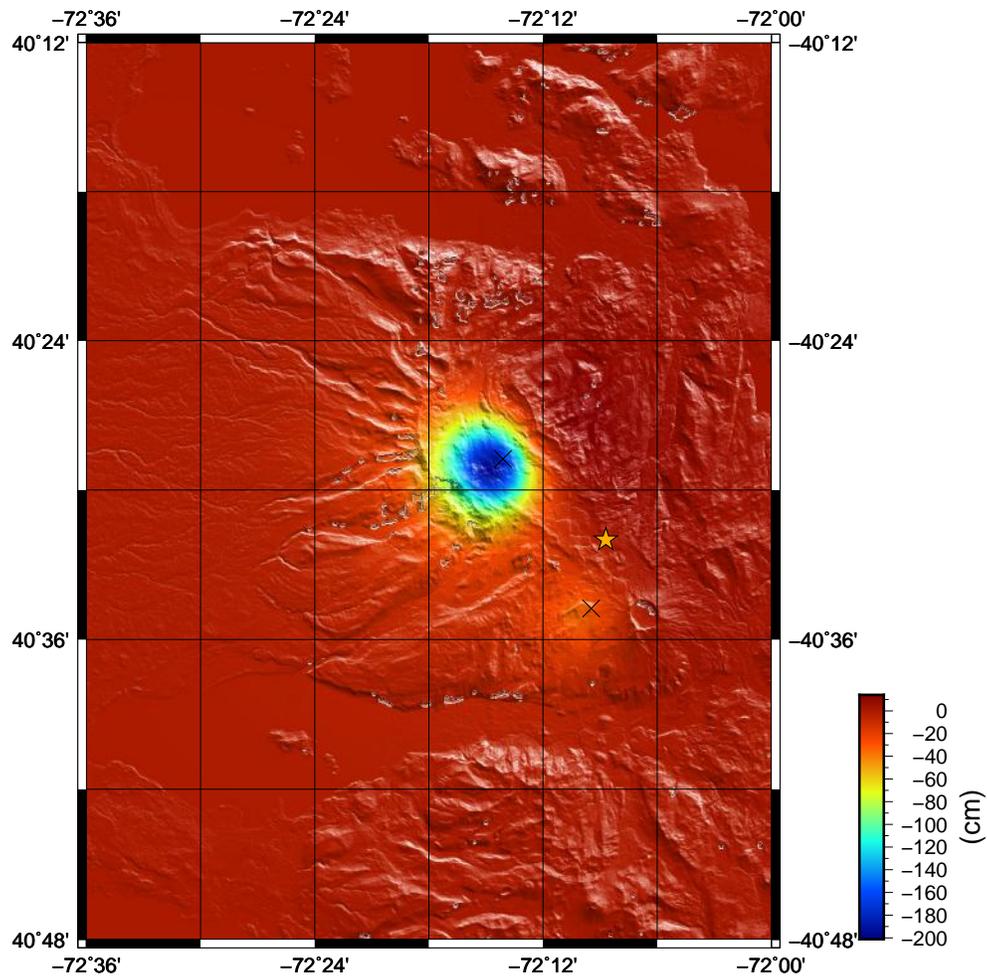


Figura 5.17: Solución del modelo FEM-Estratificado proyectada sobre la línea de visión del satélite. Los desplazamientos se muestran en centímetros y las cruces representan las fuentes de la deformación.

La principal diferencia, con la solución generada para un medio homogéneo, es la magnitud. La distribución espacial de los desplazamientos son muy parecidos.

Si hacemos una diferencia de nuestro interferograma 1 (figura 5.14) con la solución mostrada en la figura 1.17, el resultado es la figura 5.18.

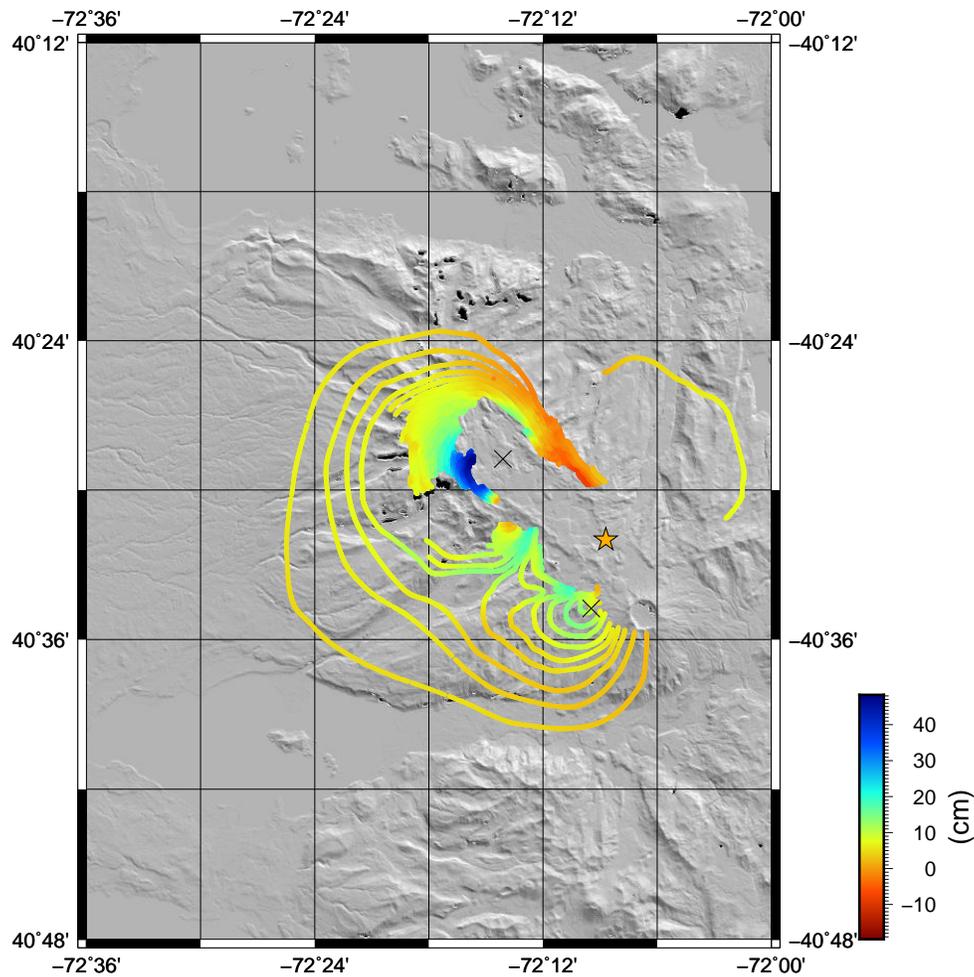


Figura 5.18: Diferencia entre el Interferograma 1 y la solución resultante del Modelo FEM-Estratificado proyectada en el LOS. Las diferencias se muestran en centímetros y las cruces representan las ubicaciones de las fuentes.

En la figura 5.18 podemos ver que la mayoría de las diferencias son positivas, varían entre -5 y 45 centímetros. Al contrario de lo que pasaba en la figura 5.16, donde encontramos diferencias positivas y negativas. La solución calculada para un medio estratificado nos entrega desplazamientos mayores a los que entrega un medio homogéneo, es por esto que al restar los desplazamientos calculados por nuestro modelo FEM-Estratificado a los datos del Interferograma 1, nos dan diferencias positivas. La media cuadrática de las diferencias es de $13,7005 \text{ cm}$ y dista del rms encontrado para un medio homogéneo. Sin embargo, estas diferencias que apreciamos en la figura 5.18 nos podrían sugerir que si consideramos un medio estratificado, necesitemos menor cambio volumétrico en las fuentes para generar una deformación similar a la que muestra el primer interferograma.

5.2.2. Segundo Interferograma

Análogo a lo que se hizo anteriormente, veremos como responden los modelos para el segundo interferograma, que va desde el 07-06-2011 hasta el 07-07-2011, que corresponde, aproximadamente, al primer mes de erupción. Al contrario de los modelos para el primer interferograma, la configuración que arrojó mejores resultados de la inversión realizada por *Wendt et al. (2016)* sugiere una configuración con una sola fuente tipo Mogi, con una ubicación $736080mE$ y $5514190mN$ (*UTM18S*), una profundidad de $5 km$ y un cambio de volumen en la esfera de $-0,163 km^3$.

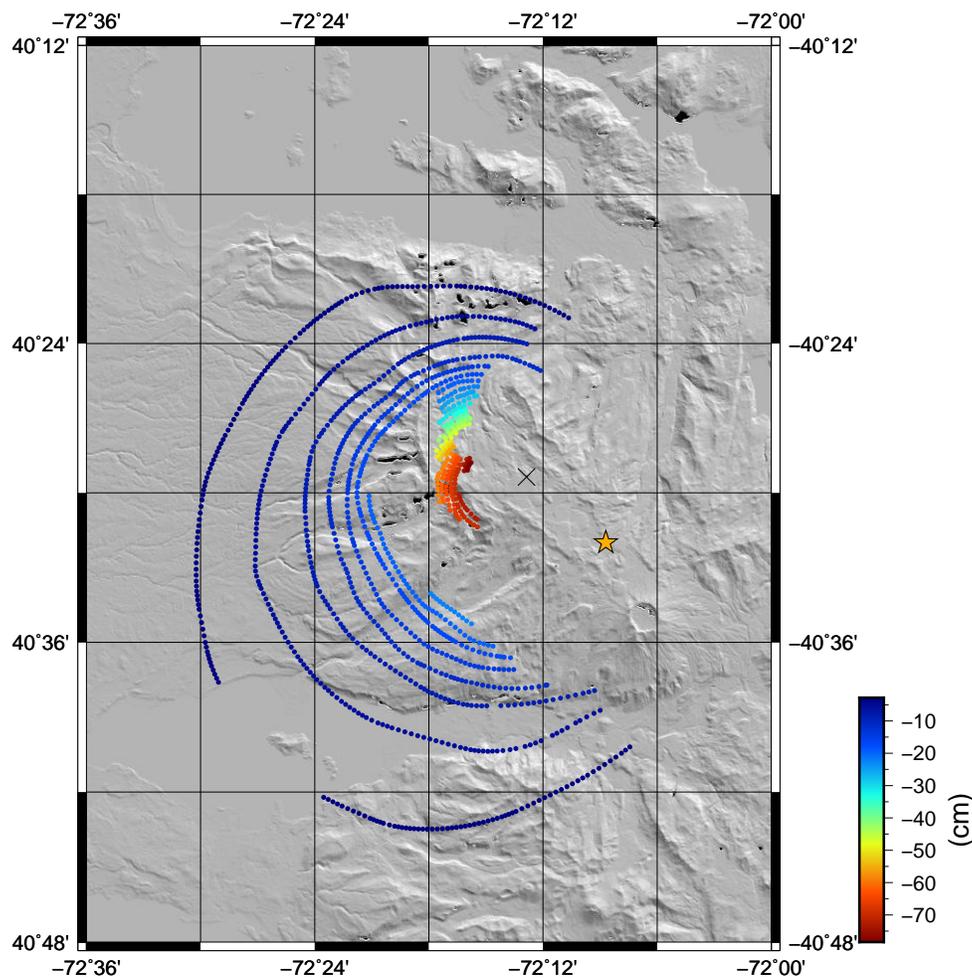


Figura 5.19: Desplazamientos en dirección LOS mostrada por el interferograma 2, en centímetros.

Modelo FEM-Homogéneo

La figura 5.19 muestra los desplazamientos del set de datos del Interferograma 2. La cruz representa la ubicación de la fuente. A simple vista, se pueden observar desplazamientos más o menos concéntricos alrededor de la fuente localizada. También, se puede observar que los desplazamientos son menores a los mostrados en el primer interferograma. Esto nos podría indicar que durante los primeros días después de la erupción (ver figura 5.14) el cambio volumétrico de la cámara es bastante importante, en comparación al mes completo de deformación que registra el segundo interferograma.

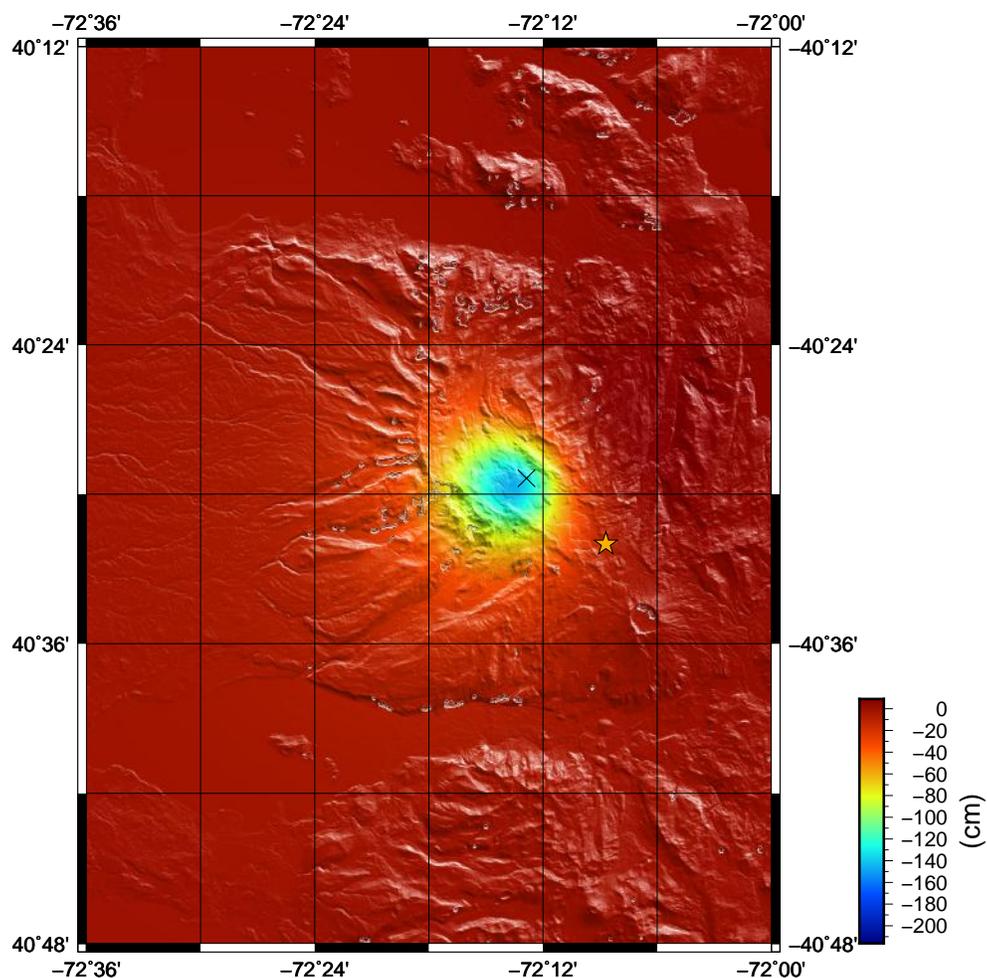


Figura 5.20: Solución del modelo FEM-Homogéneo proyectada sobre la línea de visión del satélite. Los desplazamientos se muestran en centímetros y la cruz representa la fuente de la deformación.

La figura 5.20 muestra la solución para un medio homogéneo y la configuración de la

fuelle mencionada anteriormente. A pesar que el cambio volumétrico es mayor que en los modelos hechos para el interferograma 1, los desplazamientos en dirección LOS son menores (ver figura 5.15). Esto es porque la cámara está más profunda en este modelo (a 5 km), en comparación a los anteriores (3,5 km).

Las diferencias que hay entre el Interferograma 2 (figura 5.19) y nuestro modelo FEM-Homogéneo (figura 5.20) se pueden ver en la figura 5.21. Podemos ver que las diferencias máximas y mínimas son menores que en la figura 5.16. Además, el rms de las diferencias también es menor, es de 4,6114 cm. Asimismo, da la impresión que las mayores diferencias se crean cerca de la fuente, cosa que también se puede ver, menos evidentemente, en la figura 5.16.

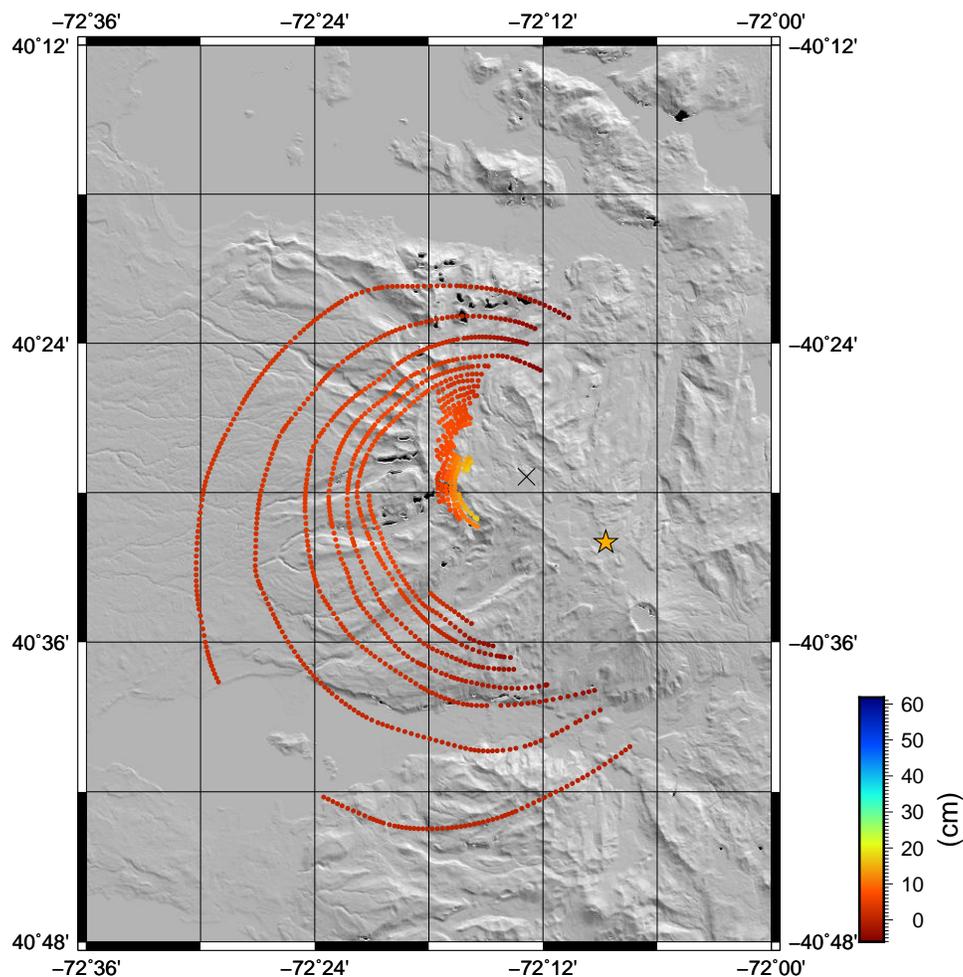


Figura 5.21: Diferencia entre el Interferograma 2 y la solución resultante del Modelo FEM-Homogéneo proyectada en el LOS. Las diferencias se muestran en centímetros y las cruces representan las ubicaciones de las fuentes.

Modelo FEM-Estratificado

Ahora generaremos una solución, con localización y cambio volumétrico igual al modelo FEM-Homogéneo, pero con diferencias en las propiedades elásticas del medio. La figura 5.22 muestra los desplazamientos en dirección LOS de esta solución con la estratificación del medio dado por la tabla 5.2. Acá podemos ver que la solución se parece mucho en distribución a la de la figura 5.20 pero dista en la magnitud.

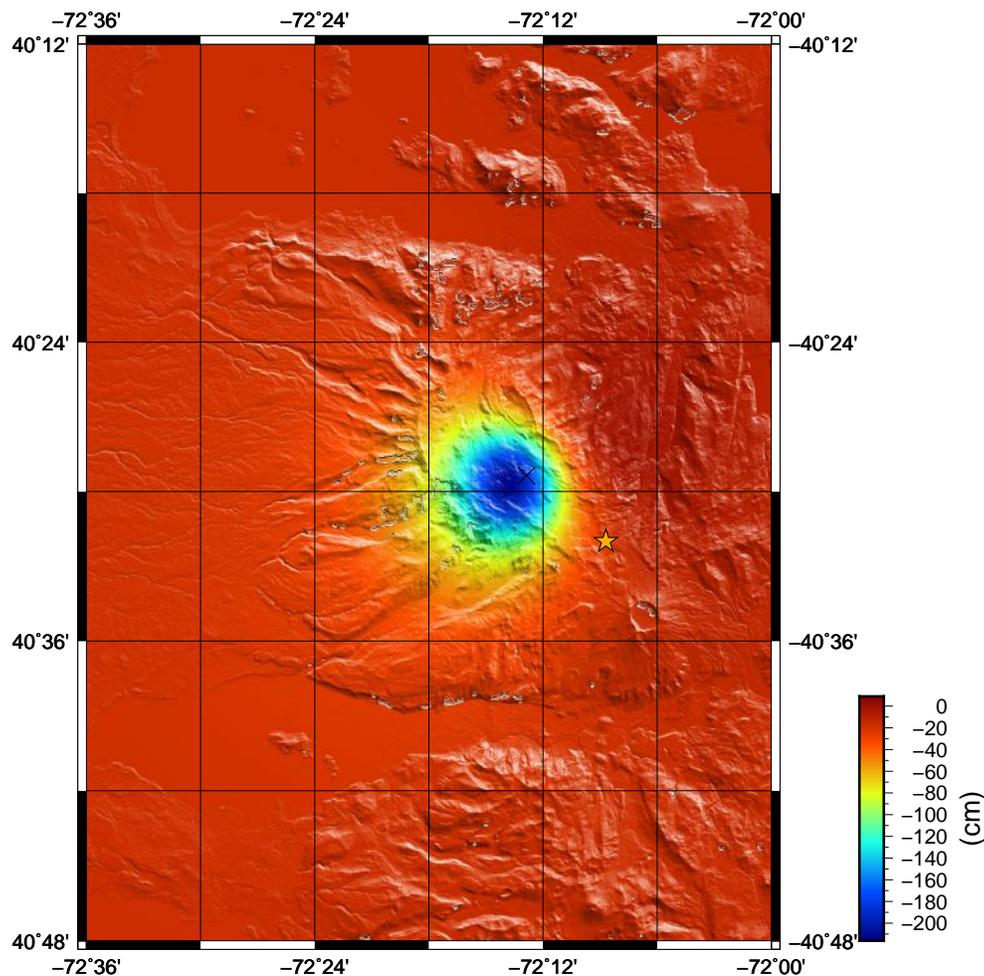


Figura 5.22: Solución del modelo FEM-Estratificado proyectada sobre la línea de visión del satélite. Los desplazamientos se muestran en centímetros y la cruz representa la fuente de la deformación.

Al calcular una diferencia entre el Interferograma 2 (figura 5.19) y la solución mostrada en la figura 5.22, la resultante es la figura 5.23. De nuevo, las diferencias son

muy positivas en comparación a las mostrada en la figura 5.21, y podría indicarnos que, para un medio estratificado de esta manera, el cambio volumétrico debería ser menor al necesario en un medio homogéneo para simular la misma deformación. En este caso el rms es de $24,67\text{cm}$.

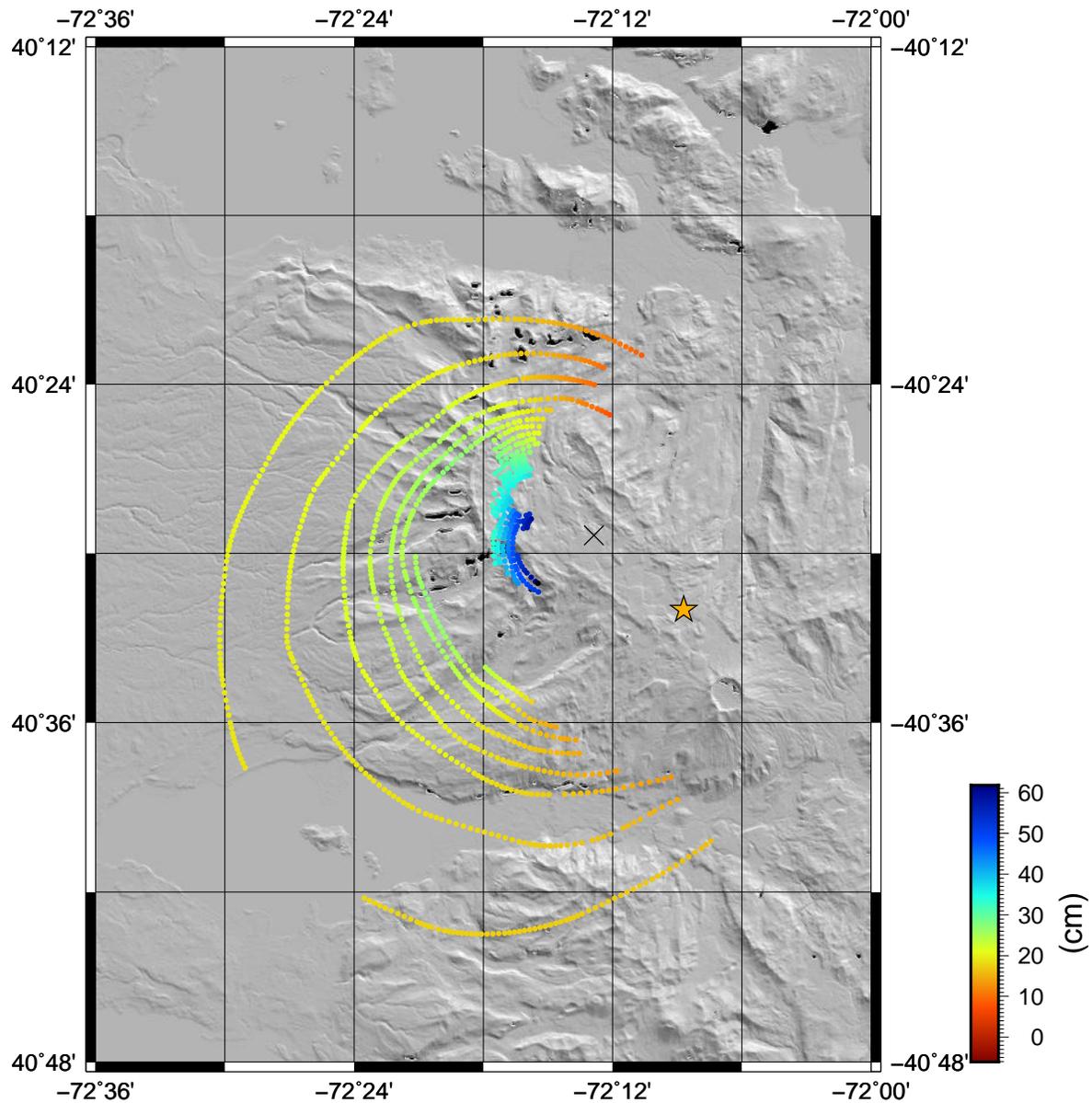


Figura 5.23: Diferencia entre el Interferograma 2 y la solución del Modelo FEM-Estratificado proyectada en el LOS. Las diferencias se muestran en centímetros y las cruces representan las ubicaciones de las fuentes.

5.2.3. Ajustando Modelos a los Datos INSAR

Las comparaciones de los modelos con los datos de los interferogramas nos sugieren que, por lo menos en algunos casos, los resultados de las soluciones podrían ajustarse mejor a los datos satelitales si bajamos la magnitud de los desplazamientos. Esto se logra modelando un cambio volumétrico menor al que hemos propuesto anteriormente (sacado de la inversión de *Wendt et al. (2016)*). Para comprobar esto, se realizaron algunos test manteniendo las ubicaciones de las fuentes pero variando el cambio de volumen. Esto lo hicimos para todos los modelos mostrados anteriormente.

Primer Interferograma

FEM-Homogéneo: Comenzaremos viendo como varía el primer modelo que se comparó con el interferograma 1. En la tabla 5.3 y 5.4, y en las figuras 5.24 y 5.25 se muestran los resultados de los test para el primer modelo homogéneo. Como este primer modelo contempla dos cámaras, primero se comenzó a variar la presión de la cámara mayor y luego, utilizando el menor rms de estos test, se empieza a variar la presión de la segunda cámara.

$DV [km^3]$	-0,095	-0,090	-0,085	-0,0825	-0,080	-0,0775	-0,075
$RMS [cm]$	8,2891	6,7441	5,7746	5,6068	5,6831	5,9943	6,5068

Tabla 5.3: Muestra los distintos rms obtenido de los test para nuestro modelo FEM-Homogéneo. Se hizo variar la cámara ubicada al Noroeste del complejo (la de mayor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la segunda cámara quedó fija en $-0,018 km^3$.

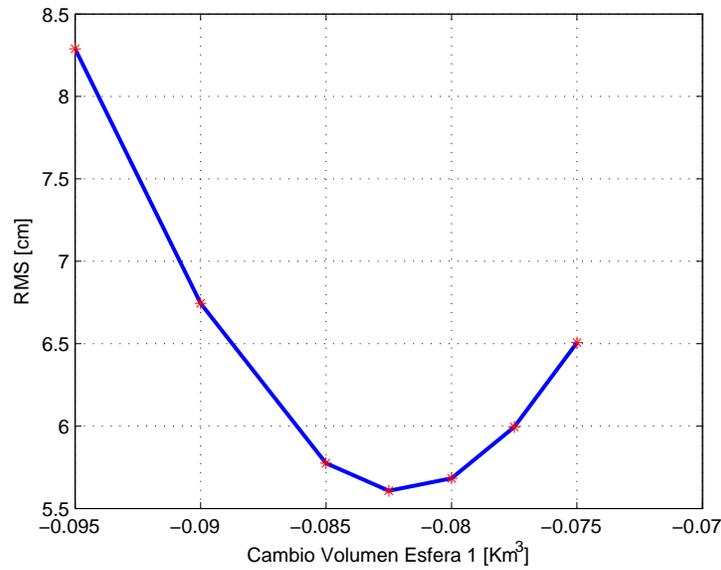


Figura 5.24: Gráfico de la tabla 5.3, muestra como varían los RMS en relación con el cambio de volumen de la esfera.

$DV [km^3]$	-0,020	-0,018	-0,016	-0,014	-0,012	-0,010	-0,008	-0,006
$RMS [cm]$	5,9519	5,6068	5,3201	5,1016	4,9605	4,9033	4,9330	5,0480

Tabla 5.4: Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Homogéneo. Se hizo variar la cámara ubicada al Sureste del complejo (la de menor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la primera cámara quedó fija en $-0,0825 \text{ km}^3$ (menor rms de la tabla anterior).

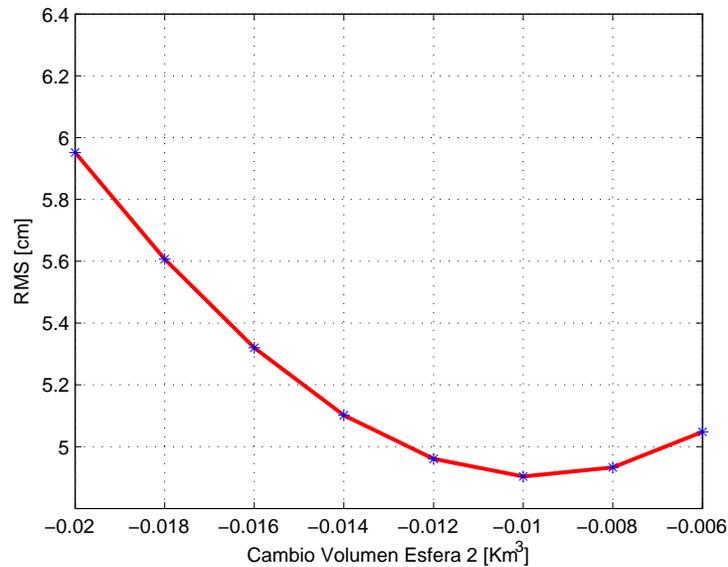


Figura 5.25: Gráfico de la tabla 5.4, muestra como varían los RMS en relación con el cambio de volumen de la esfera..

Como podemos ver, para nuestro primer modelo hay otros cambio de volumen que minimizan el rms de las diferencias con los datos InSar. Para este caso, aun asumiendo el medio homogéneo, se generan diferencias con respecto a la modelación analítica. De los test hechos, el que mejor se ajusta para este primer modelo, es con un cambio de volumen para la cámara Noroeste de 0,0825 y de 0,01 para la esfera ubicada al Sureste.

Así, un modelo FEM homogéneo para el primer interferograma, con cambios de presión que minimizen sus diferencias queda dado por la figura 5.26. Mientras que sus diferencias con los datos InSar, se puede ver resumido en la figura 5.27.

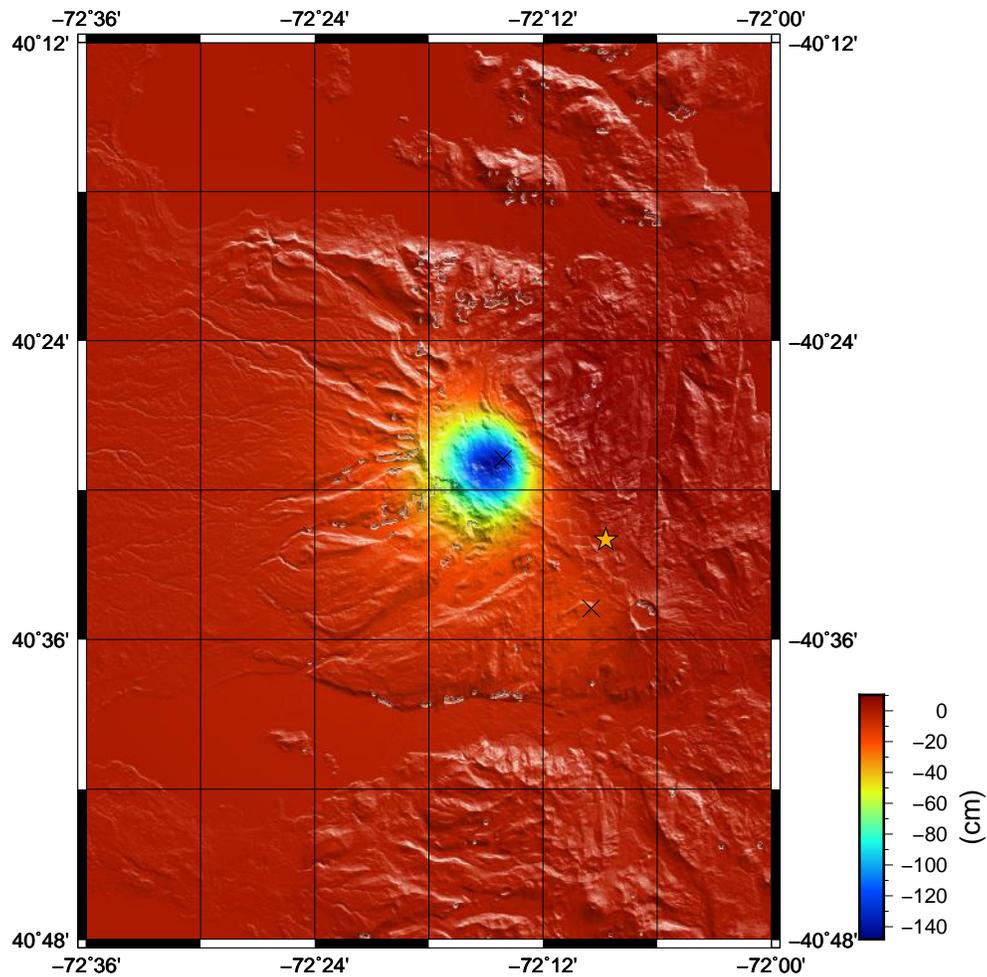


Figura 5.26: Solución del modelo FEM-Homogéneo con cambios de presión que minimizan los rms.

Cuando se disminuye el cambio de presión, lógicamente, la amplitud de la deformación máxima también disminuye. Esto lo podemos apreciar bien al comparar la figura 5.26 con la 5.15. Si comparamos las figura 5.27 con la 5.16, podemos ver que el rango en que están las diferencias entre los modelos y los datos InSar varían. A pesar que las diferencias máximas pareciera acentuarse en la figura 5.27, las diferencias en la mayoría del mapa se hacen más pequeñas, esto hace que el rms finalmente sea menor ($4,9033cm$).

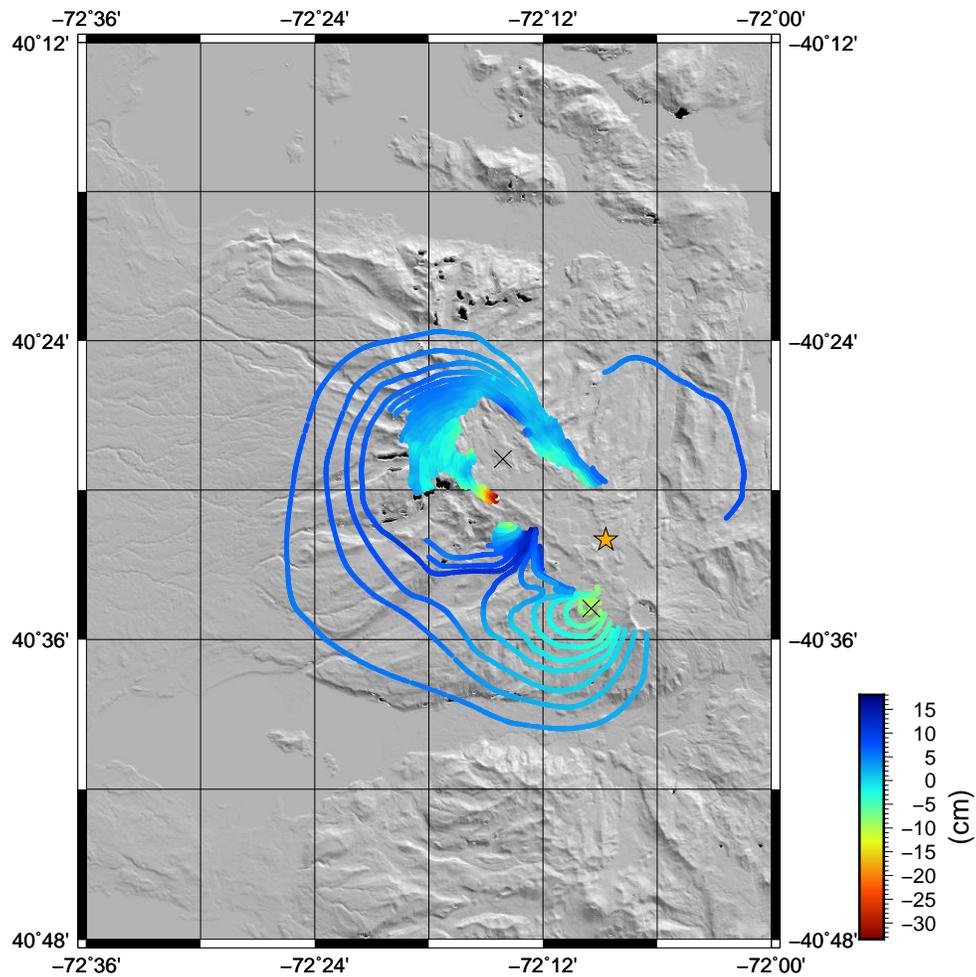


Figura 5.27: Diferencia entre el Interferograma 1 y la solución resultante del Modelo FEM-Homogéneo con rms minimizados.

FEM-Estratificado: Análogo a lo hecho anteriormente, las tablas 5.5 y 5.6, y las figuras 5.28 y 5.29, muestran los rms, para distintos cambios de volumen, de las diferencias entre nuestro modelo FEM-Estratificado y las observaciones InSar. La tabla 5.5 muestra los rms cuando hacemos variar el cambio de volumen de la cámara ubicada más al Noroeste dejando la otra fija. Luego, la tabla 5.6 muestra los valores de los rms para variaciones de la segunda cámara, ubicada la Sureste, dejando la primera fija.

$DV [Km^3]$	-0,095	-0,085	-0,0775	-0,075	-0,0725	-0,070	-0,065
$RMS [cm]$	13,7005	8,8992	6,0473	5,4537	5,1582	5,2117	6,2725

Tabla 5.5: Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Estratificado. Se hizo variar la cámara ubicada al Noroeste del complejo (la de mayor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la segunda cámara quedó fija en $-0,018 km^3$.

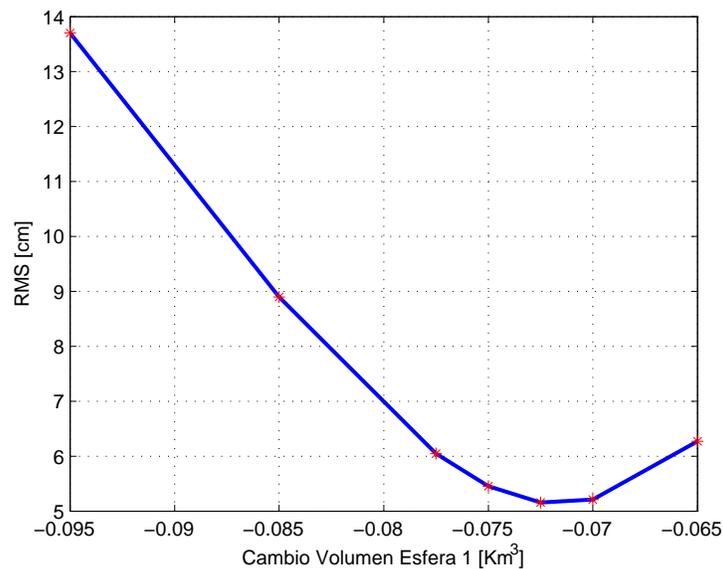


Figura 5.28: Gráfico de la tabla 5.5, muestra como varían los RMS en relación con el cambio de volumen de la esfera.

$DV [km^3]$	-0,018	-0,016	-0,014	-0,012	-0,010	-0,008	-0,006
$RMS [cm]$	5,1582	5,2117	4,2908	4,0273	3,9348	4,0253	4,2871

Tabla 5.6: Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Estratificado. Se hizo variar la cámara ubicada al Sureste del complejo (la de menor cambio volumétrico), mientras el cambio de volumen de la primera cámara quedó fija en $-0,0725 km^3$ (menor rms de la tabla anterior).

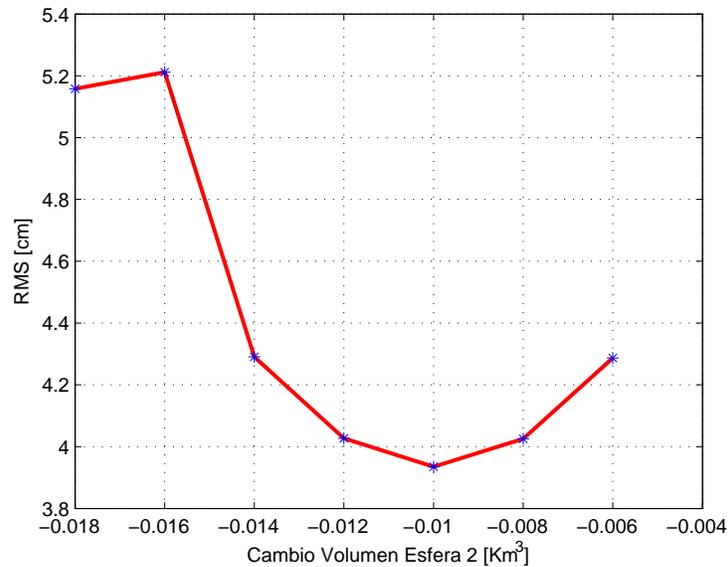


Figura 5.29: Gráfico de la tabla 5.6, muestra como varían los RMS en relación con el cambio de volumen de la esfera.

Al igual que en el caso anterior, vemos que un menor cambio de volumen, en ambas cámaras, hace que el error cuadrático medio de las diferencias sea menor. Cuando comparamos las diferencias entre el modelamiento hecho con un medio homogéneo y el del medio estratificado, para el primer interferograma, hay dos cosas que se pueden notar: 1) El rms de las diferencias se minimiza ocupando un menor cambio de volumen, tanto para el medio estratificado como para el homogéneo. 2) El rms es menor en el caso del medio estratificado, aunque hay que destacar que ambos son muy bajos, siendo aproximadamente entre un 3% y un 4% del desplazamiento máximo registrado.

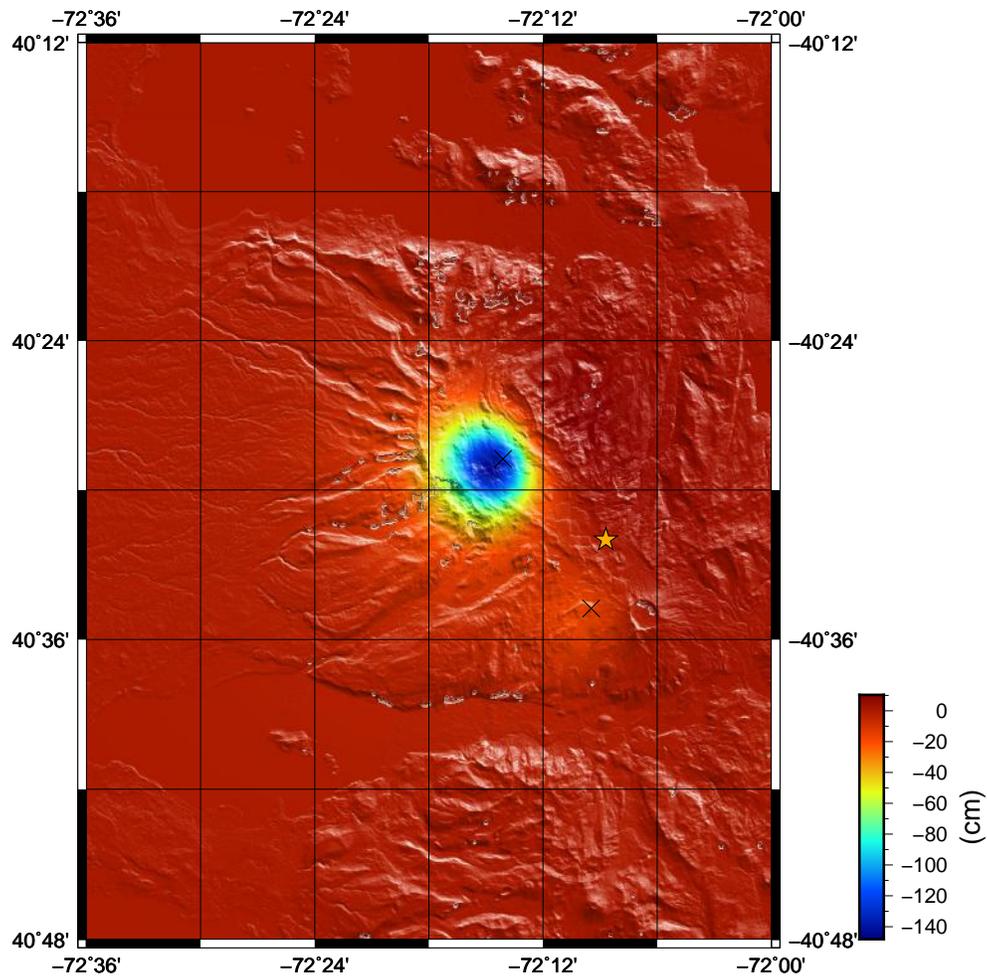


Figura 5.30: Solución del modelo FEM-Estratificado con cambios de presión que minimizan los rms.

Las figuras 5.30 y 5.31 ilustran el modelo hecho para el primer interferograma, con un medio estratificado, que minimiza los rms. Cuando comparamos estas figuras con las 5.26 y 5.27, podemos ver que se parecen mucho, sin embargo varían los desplazamientos máximos y mínimos, tanto de los modelos como de las diferencias con los datos InSar. El rango de las diferencias para el modelo estratificado es menor que el para un medio homogéneo.

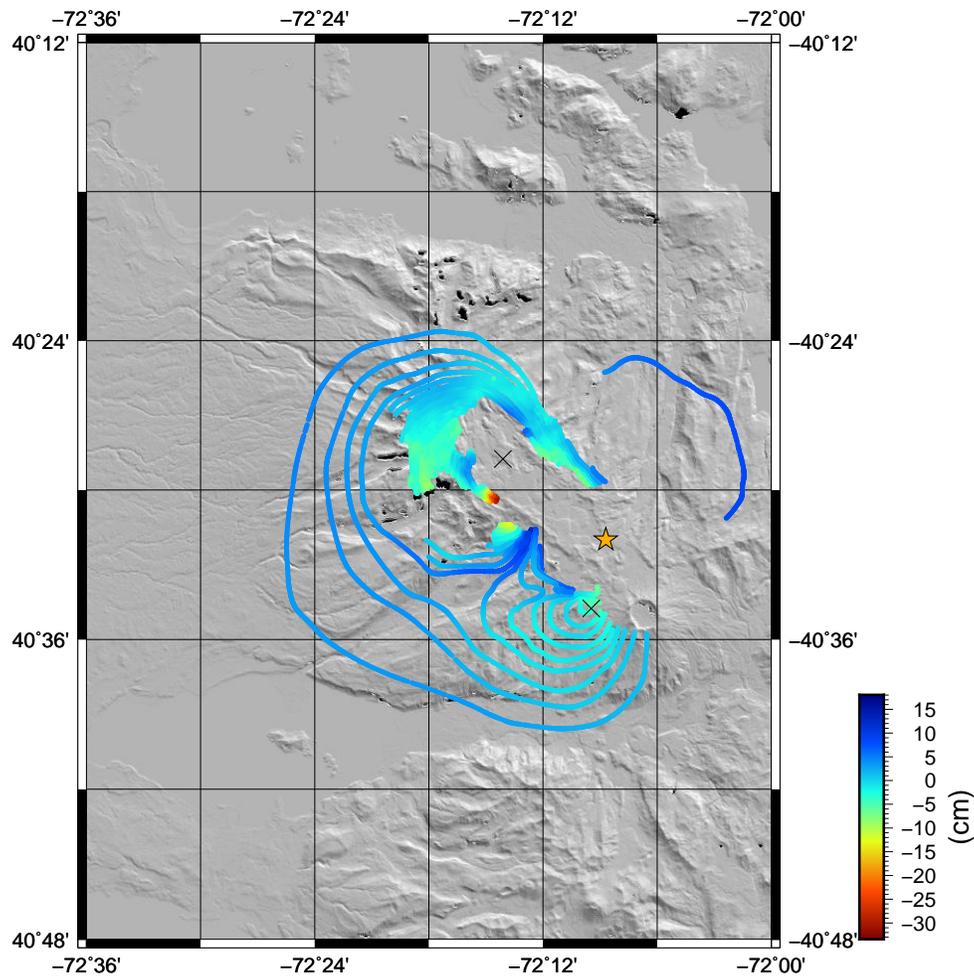


Figura 5.31: Diferencia entre el interferograma 1 y la solución resultante del Modelo FEM-Estratificado con rms minimizados.

A modo de resumen, se muestra en la tabla 5.7 los cambios de volúmenes y rms de las soluciones que minimizan los errores. Además se compara con la solución analítica (*Wendt et al., 2016*).

	DV1 [km^3]	DV2 [km^3]	RMS
Analítico	-0,96	-0,017	5,4
FEM Homogéneo	-0,0825	-0,010	4,9033
FEM Estratificado	-0,0725	-0,010	3,9348

Tabla 5.7: Resumen de los modelos que mostraron menor rms del interferograma 1 junto con la solución analítica (*Wendt et al., 2016*).

Interferograma 2

FEM-Homogéneo: Ahora, seguiremos con los modelos que se compararon con el segundo interferograma. Testaremos nuestro un FEM-Homogéneo para el segundo interferograma. Recordemos que este modelo considera sólo una esfera, así que solamente hay que variar el cambio volumétrico sobre una cámara. La tabla 5.8 y la figura 5.32 nos muestra los resultados de los test hechos bajo estas condiciones.

$DV[km^3]$	-0,163	-0,153	-0,148	-0,143	-0,138	-0,133	-0,123
$RMS [cm]$	4,6114	2,9401	2,4327	2,1737	2,2504	2,6338	3,9091

Tabla 5.8: Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Homogéneo.

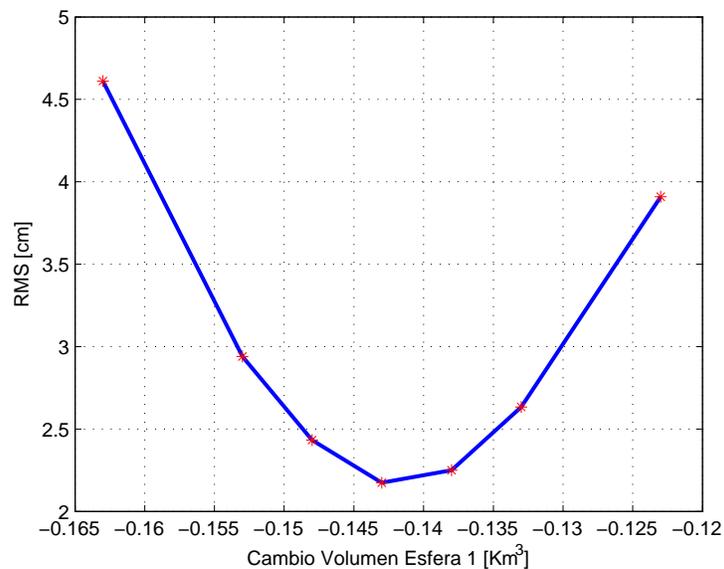


Figura 5.32: Gráfico de la tabla 5.8, muestra como varían los RMS en relación con el cambio de volumen de la esfera.

Podemos ver que el cambio volumétrico que minimiza el rms de las diferencias es de $-0,143 km^3$. Esto también es menor que los $-0,163 km^3$ calculados por *Wendt et al. (2016)* con el modelo analítico de *Mogi (1958)*.

La figura 5.33 nos muestra los desplazamientos en superficie, proyectados en dirección LOS, del modelo FEM-Homogéneo con el cambio de volumen de la cámara

que minimiza los rms. Mientras que la figura 5.34 nos muestra la distribución de las diferencias entre los datos InSar y este modelo.

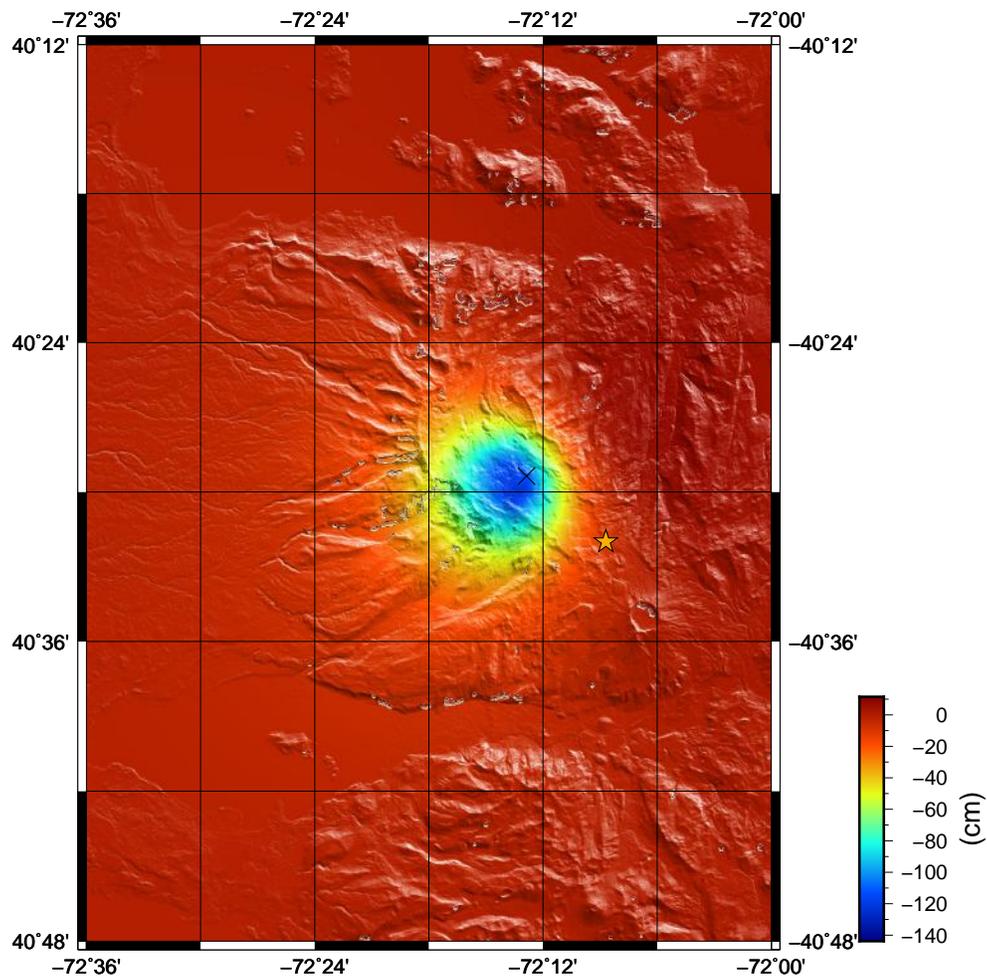


Figura 5.33: Solución del modelo FEM-Homogéneo con cambios de presión que minimizan los rms.

De nuevo, podemos ver como un menor cambio de volumen, que implica menor deformación máxima, hace que los datos se ajusten mejor a los datos reales. De la figura 5.34, vemos que las máximas y mínimas diferencias son bajas (en magnitud), consecuente al bajo rms que muestra la tabla 5.8.

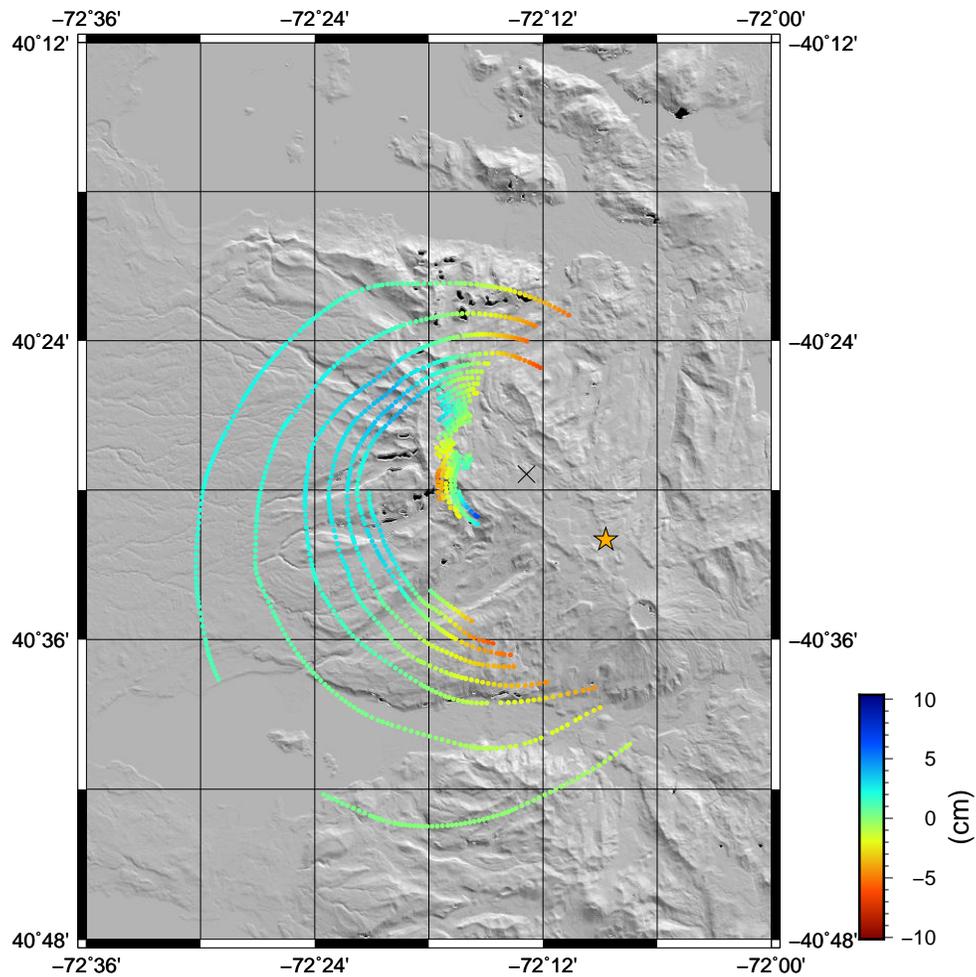


Figura 5.34: Diferencia entre el Interferograma 1 y la solución resultante del Modelo FEM-Homogéneo con rms minimizados.

FEM-Estratificado: Por último, sólo nos queda ver como se comporta nuestro modelo FEM-Estratificado 2 cuando hacemos variar el cambio volumétrico de la esfera. La tabla 5.9 y la figura 5.35 nos ilustra esto. De esta última figura, podemos ver que el cambio de volumen que minimiza el rms de las diferencias es de $-0,118 \text{ km}^3$, mucho menor a los $-0,163 \text{ km}^3$ que postula *Wendt et al. (2016)* y también menor a los calculados para el caso análogo homogéneo.

$DV[km^3]$	-0,163	-0,153	-0,143	-0,133	-0,123	-0,118	-0,113	-0,108	-0,103
$RMS [cm]$	10,4553	8,3862	6,3664	4,4632	2,9150	2,4962	2,5023	2,9306	3,6349

Tabla 5.9: Muestra los resultados de los test para nuestro modelo FEM-Estratificado.

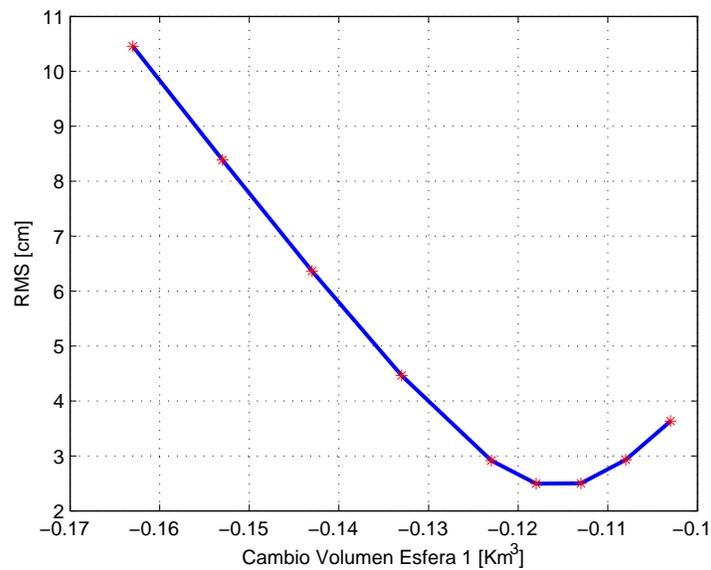


Figura 5.35: Gráfico de la tabla 5.9, muestra como varían los RMS en relación con el cambio de volumen de la esfera..

Las figuras 5.36 y 5.37 nos muestran los resultados del modelo FEM-Estratificado con el cambio de volumen que minimiza los rms. La figura 5.36 nos muestra una mayor deformación máxima que la 5.33. Estos dos modelos, distan más uno del otro que el caso del Interferograma 1 (figuras 5.26 y 5.30 se parecen mucho más entre ellas).

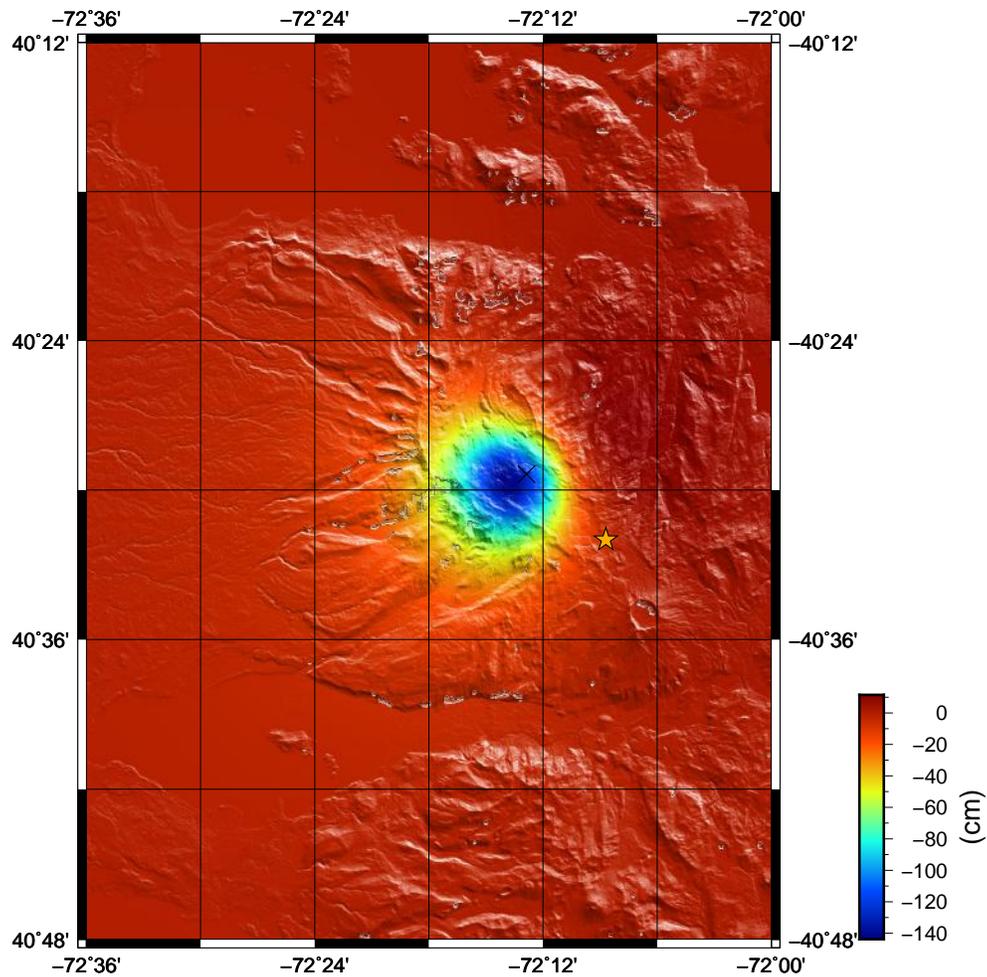


Figura 5.36: Solución del modelo FEM-Estratificado con cambios de presión que minimizan los rms.

Las distribuciones de las diferencias entre el desplazamiento calculado y los datos InSar (figura 5.37) se parece mucho a los vistos en la sección anterior (figura 5.34), sin embargo varían en magnitud. Las diferencias máximas y mínimas, esta vez, son mayores en el caso estratificado que en el homogéneo. También el rms calculado para el caso homogéneo es un poco menor al mostrado en la tabla 5.9.

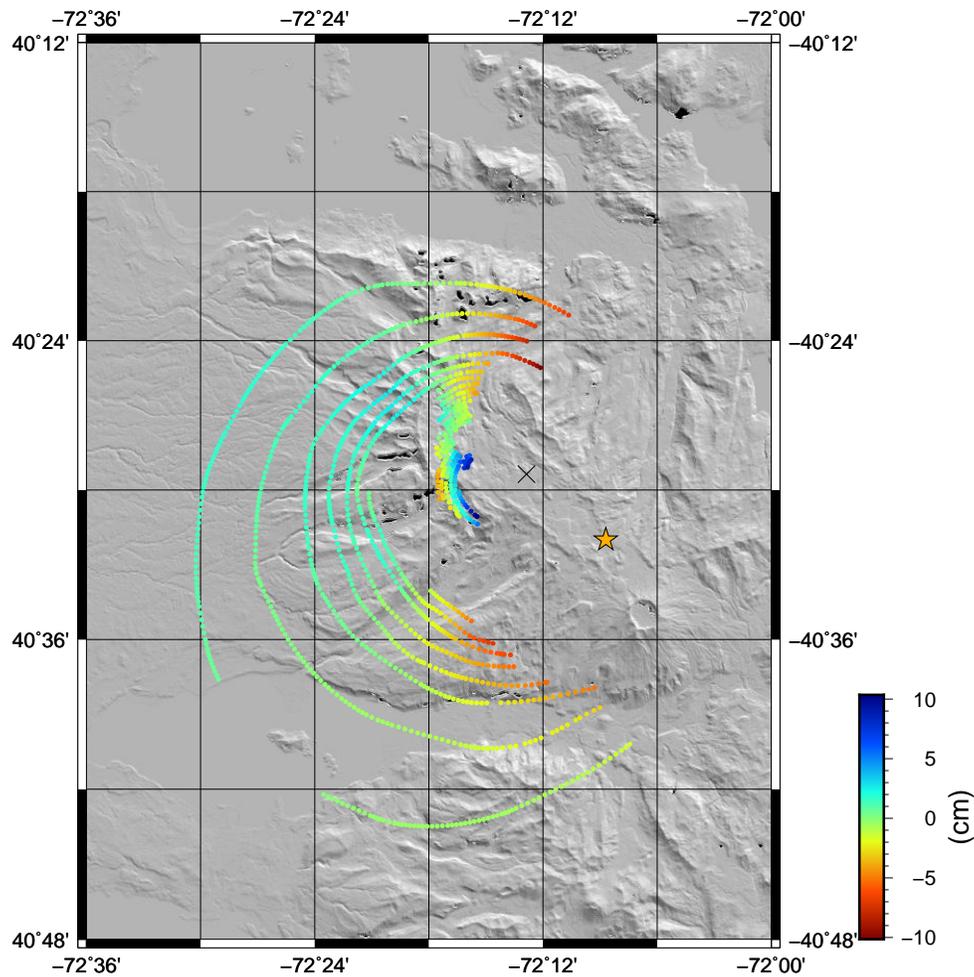


Figura 5.37: Diferencia entre el Interferograma 1 y la solución resultante del Modelo FEM-Estratificado con rms minimizados.

Análogo a lo hecho en la sección anterior, en la tabla 5.10 se muestran los cambios de volúmenes y rms de las soluciones que minimizan los errores. Además se compara con la solución analítica (*Wendt et al., 2016*).

	DV1 [km^3]	RMS
Analítico	-0,169	2,2
FEM Homogéneo	-0,143	2,1737
FEM Estratificado	-0,118	2,4962

Tabla 5.10: Resumen de los modelos que mostraron menor rms para el interferograma 2 junto con la solución analítica (*Wendt et al., 2016*).

Capítulo 6

Discusión y Conclusión

En general, según los resultados de nuestros modelos, el programa *Elast* demostró dar resultados estables en 3d, para modelar deformación del tipo *Mogi (1958)*, es decir, desplazamientos debido al cambio de volumen de una esfera inserta en un medio.

Nos podemos dar cuenta que las soluciones con elementos finitos son distintos a los resultantes de los modelos analíticos, aún cuando ambos consideren un medio homogéneo. En el caso de considerar un medio estratificado, como algunos modelos mostrados en este trabajo, las soluciones distan aun más, dándonos una idea de como pueden variar los resultados obtenidos en base a algunas suposiciones. Puntualmente, la suposición de asumir el medio como un semi-espacio infinito, sólido de Poisson, homogéneo e isotrópico es una limitante que, por lo menos, hay que cuestionársela a la hora de crear modelos de deformación.

Tomando en cuenta los valores de los rms de la sección anterior, vemos que un medio estratificado, aunque es una suposición más realista, no nos asegura un mejor ajuste a los datos. Si bien para el Interferograma 1, el medio estratificado muestra una rebaja considerable del rms, para el caso del Interferograma 2 no es así, incluso es un poco mayor que para el caso homogéneo, esto lo discutiremos en las secciones posteriores.

6.1. Interferograma 1

Cuando comparamos los modelos que minimizan los errores para el primer interferograma, nos damos cuenta que el modelo estratificado da mejores resultados que el homogéneo. El modelo estratificado tiene, en promedio, un centímetro menos de rms (4,9 cm vs 3,9 cm). Aunque, hay que destacar, que ambos son muy bajos y representan un 4,0% y un 3,2% de la deformación máxima registrada por el Interferograma 1, respectivamente. Ahora, en comparación al modelo analítico, ambos muestran una mejora, ya que el rms estimado por *Wendt et al. (2016)* es de 5,4 cm.

Para el primer interferograma, que comprende entre el 08/05/2011 hasta el 07/06/2011, *Wendt et al. (2016)* estimaron un cambio volumétrico total de $-0,113 \text{ Km}^3$, dividido en dos fuentes, siendo la fuente Noroeste (cerca de Cordillera Nevada) la más influyente, atribuyéndole un 84% de esta deformación total. Estas fuentes de deformación son coincidentes con los encontrados por *Fournier et al. (2010)* pre-eruptivamente y las propuestas por *Jay et al. (2014)*.

Como dijimos anteriormente, el primer interferograma alcanza a cubrir los primeros días de la erupción. Durante esta fase explosiva, *Pistolesi et al. (2015)* estimaron el volumen de roca expulsado (DRE) en $V_e = 0,27 \text{ km}^3$. La compresibilidad del magma fue estimada por *Jay et al. (2014)* en $K_m = 2,1 \pm 0,4 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. Si tomamos la relación de *Mastin et al. (2009)*:

$$\frac{V_e}{\Delta V} = - \left(1 + \frac{K_m}{K_r} \right) \quad (6.1)$$

Con los valores de los parámetros antes mencionado, da un valor de la compresibilidad del medio de $K_r = 1,5 \pm 0,4 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

También, se puede calcular la compresibilidad del medio por medio de nuestro modelo de velocidades. Esto se hace usando la relación de *Birch (1960)*:

$$\frac{1}{K_r} = \beta = \rho \left(V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 \right) \quad (6.2)$$

Considerando $\rho = 2550 \frac{kg}{m^3}$, el valor de K_r sería del orden de $2 \times 10^{-11} Pa^{-1}$. Así, podemos ver que el modelo propuesto por *Wendt et al. (2016)* sobrestima el valor de la compresibilidad del medio.

Por otro lado, nuestro modelo FEM-Estratificado para nuestro primer interferograma que minimiza los rms, nos indica que el cambio volumétrico de la fuentes es de $-0,0825$. Usando la ecuación 6.1 nos da un valor de la compresibilidad del medio de $9,24 \times 10^{-11} Pa^{-1}$. Aunque aún está alejado del valor calculado a partir del modelo de velocidades, éste se acerca más.

Una posible respuesta a esta diferencia, se basa en el hecho de que el medio haya cambiado de compresibilidad durante la erupción. Ya que el modelo de velocidades es del año 2014, se podría pensar que las fracturas de roca y los traspasos de fluidos que sucedieron durante la erupción hayan bajado la compresibilidad del medio. Entonces, podríamos pensar que los primeros días de la erupción, el medio era mucho más rígido y esto podría explicar, en parte, las diferencias encontradas en este parámetro.

Otro punto, es el hecho que la estratificación del modelo, si bien representa una mejora en comparación a la solución homogénea, no sea lo suficientemente compleja para explicar a cabalidad la deformación sufrida por el medio durante la erupción. Esto, podría traer consigo un error en la estimación de los cambios volumétricos de las esfera y, por ende, una diferencia en el cálculo de la compresibilidad del medio, según la ecuación 6.1.

6.2. Interferograma 2

Para el interferograma 2, que comprende entre el 07/06/2011 hasta el 07/07/2011, el modelo estratificado no muestra una mejora en los rms, en comparación al homogéneo, como sí se podía apreciar para el caso anterior. Eso si, el rms de $2,49 cm$ que muestra el modelo estratificado versus los $2,17 cm$ que muestra el homogéneo, no distan mucho y ambos los consideramos muy bajos, aproximadamente un $3,0\%$ del desplazamiento máximo mostrado por el segundo interferograma. Al comparar ambos valores con los

2,2 cm de rms del modelo analítico de *Wendt et al. (2016)*, podemos apreciar que también está muy cerca a lo resultante de los modelos FEM.

Esta vez, la fuente de deformación estimada se encuentra más cerca del vent, esto nos podría hablar de una migración de magma desde el sector de Cordillera Nevada, hacia el Cordón Caulle.

Según *Bertin et al. (2012)*, fueron $0,10 \text{ km}^3$ de lava expulsados entre el 15 de junio y el 7 de julio. Este valor es mucho menor a los $0,169 \text{ km}^3$ estimado por *Wendt et al. (2016)*. El ajuste del rms de nuestro modelo estratificado para el segundo interferograma, nos sugiere un cambio volumétrico de $0,118 \text{ km}^3$. A pesar de que este valor está mucho más cerca del sugerido por *Bertin et al. (2012)*, según *Bignami et al. (2015)* sería muy bajo, ya que en ese estudio se plantea que antes de que comenzara la fase efusiva (entre el 7 y el 15 de junio) hay una cantidad importante de gases y cenizas que son liberadas por el volcán. Como el interferograma 2 comienza el 7 de junio, este incorpora días con altas tasas de expulsión de material desde el volcán (*Bignami et al. 2015*), lo que involucra un cambio volumétrico importante en la fuente. Así, mientras el modelo analítico creado por *Wendt et al. (2016)* sobrestima el valor del cambio volumétrico dentro de la esfera, nuestro modelo estratificado podría subestimarlos, aunque este último se acerca más a los valores esperados.

6.3. Rol de Estructura Elástica del Medio

De los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, se puede concluir que la caracterización del medio jugará un rol fundamental en la realización de modelos. Las soluciones obtenidas desde un medio estratificado varían considerablemente en comparación a las soluciones basadas en un medio homogéneo. Esto se torna importante, por ejemplo, si queremos conocer algunos parámetros de la fuente a partir de observaciones. Al realizar una inversión, algunos parámetros, como la profundidad y el cambio volumétrico de la fuente, estarán fuertemente ligados a las propiedades elásticas que le otorguemos al medio. Por esto, es de vital importancia cuestionarse la estructura que le asignaremos al medio para confeccionar un modelo.

Capítulo 7

Desarrollo Futuro

Si bien la estratificación del modelo supone una mejora considerable en comparación a un modelo que asuma un medio como un semi-espacio homogéneo, sólido de Poisson, homogéneo e isotrópico, todavía es posible mejorar mucho en la caracterización del medio. Una de las cosas a mejorar es la representación de las estructuras geológicas. Representar una geología tan compleja como la del CVPCC con un medio estratificado y una (o dos) esfera(s) inmersas en este medio, es todavía muy simplista. En este sentido, se debería comenzar incorporando al modelo las principales fallas de la zona de estudio, implementando estas fallas a través de una malla más trabajada.

Por otro lado, los modelos de elasticidad lineal, si bien nos simplifican los cálculos, también idealizan los modelos. Incorporar viscosidad sería también un gran avance hacia crear un modelo más realista.

Por último, también se puede avanzar, desde lo expuesto en este trabajo, a realizar una inversión que considere un medio estratificado, incorporando así un nuevo elemento que hará más veraz los resultados de la inversión realizada.

Bibliografía

- [1] Bertin, D., Amigo, A., Lara, L., Orozco, G., Silva, C., 2012. Erupción del Cordón Caulle 2011-2012: Evolución fase efusiva. *Congreso Geológico Chileno, vol 13*.
- [2] Bertin, D., Lara, L. E., Basualto, D., Amigo, Á., Cardona, C. Franco, L., Gil, F., Lazo, J., 2015. High effusion rates of the Cordón Caulle 2011-2012 eruption (Southern Andes) and their relation with the quasi-harmonic tremor. *Geophysical Research Letters*, DOI: 10.1002/2015GL064624.
- [3] Bignami, C., Corradini, S., Merucci, L., de Michele, M., Raucoules, D., De Astis, G., Stramondo, S., Piedra, J., 2014. Multisensor Satellite Monitoring of the 2011 Puyehue-Cordon Caulle Eruption. *IEEE Journal os Selected Topics in Aplplied Earth Observations and Remote Sensing.*, DOI: 10.1109/JSTARS.2014.2320638.
- [4] Birch, F., 1960. The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars: 1. *Journal of Geophysical Research*, 65(4).
- [5] Fournier, T. J., Pritchard, M. E., Riddick, S. N., 2010. Duration, magnitude, and frequency of subaerial volcano deformation events: New results from Latin America using InSAR and a global synthesis. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, DOI: 10.1029/2009GC002558.
- [6] Jay, J., Costa, F., Pritchard, M., Lara, L., Singer, B., Herrin, J., 2014. Locating magma reservoirs using InSAR and petrology before and during the 2011–2012 Cordón Caulle silicic eruption. *Earth and Planetary Science Letters*, DOI: 10.1016/j.epsl.2014.03.0460012-821X.

- [7] Lara, L. E., Clavero, J., Hinojosa, M., Huerta, S., Wall, R., Moreno, H., 2006. NVEWS-CHILE: Sistema de clasificación semicuantitativa de la vulnerabilidad volcánica. *XI Congreso Geológico Chileno. Actas, vol 2: Volcanismo y Magmatismo*, 487-490.
- [8] Lara, L. E., Moreno, H., Naranjo, J. A., Matthews, S., Pérez de Arce, C., 2006. Magmatic evolution of the Puyehue–Cordón Caulle volcanic complex (40° S), Southern Andean Volcanic Zone: from shield to unusual rhyolitic fissure volcanism. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, DOI:10.1016/j.jvolgeores.2006.04.010
- [9] Lara, L. E., Naranjo, J. A., Moreno, H., 2004. Rhyodacitic fissure eruption in Southern Andes (Cordón Caulle; 40.58S) after the 1960 (Mw:9.5) Chilean earthquake: a structural interpretation. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, DOI:10.1016/j.jvolgeores.2004.06.009.
- [10] Masterlark, T., 2007. Magma intrusion and deformation predictions: Sensitivities to the Mogi assumptions. *Journal of Geophysical Research*, DOI: 10.1029/2006JB004860.
- [11] Mastin, L. G., Lisowski, M., Roeloffs, E., Beeler, N., 2009. Improved constraints on the estimated size and volatile content of the Mount St. Helens magma system from the 2004–2008 history of dome growth and deformation. *Geophysical Research Letters*, DOI: 10.1029/2009GL039863.
- [12] Mogi, K., 1958. Relations between the eruptions of various volcanoes and the deformations of the ground surfaces around them. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, **36**, 99-134.
- [13] Okada, Y., 1985. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, **36**, 99-134.
- [14] Pistolesi, M., Cioni, R., Bonadonna, C., Elissondo, M., Baumann, V., Bertagnini, A., Chiari, L., Gonzales, R., Rosi, M., Francalanci, L., 2015. Complex dynamics of small-moderate volcanic events: the example of the 2011 rhyolitic Cordón Caulle

- eruption, Chile. *Bulletin of Volcanology*, **77(1)**, 1-24. DOI 10.1007/s00445-014-0898-3
- [15] Sepúveda, F., Dorsch, K., Lahsen, A., Bender, S., Palacios, C., 2004. Chemical and isotopic composition of geothermal discharges from the Puyehue-Cordón Caulle area (40.5 ° S), Southern Chile. *Elsevier*, DOI: 10.1016/j.geothermics.2003.10.005
- [16] Simkin, T., Siebert, L., 1994. Volcanoes of the world. *Geoscience Press, Tucson*, 349p.
- [17] Singer, B. S., Jicha, B. R., Harper, M. A., Naranjo, J. A., Lara, L. E., Moreno-Roa, H., 2008. Eruptive history, geochronology, and magmatic evolution of the Puyehue-Cordón Caulle volcanic complex, Chile. *Geological Society of America Bulletin*, **120(5-6)**, 599–618.
- [18] Wendt, A., Tassara, A., Lara, L., Baez, J., Basualto, D., García, F. Possible structural control on the 2011 eruption of Puyehue-Cordón Caulle Volcanic Complex (southern Chile) determined by InSAR, GPS and seismicity. *Geophysical Journal International*.