



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Geofísica

Modelación numérica de glaciares que producen témpanos

Tesis para optar al título profesional de geofísico

Autor:
Juan Pablo Tolosa Sanzana

Profesor guía:
Juan Inzunza Bustos

26/07/2016

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Cambio climático	2
1.1.1. Nivel del mar	3
1.2. Glaciares	4
1.2.1. Balance de masa	4
1.3. <i>Calving</i>	5
1.3.1. Velocidad de desprendimiento	6
1.4. Ciclo de un glaciar que produce témpanos	6
1.5. Objetivos	7
2. Marco teórico	9
2.1. Balance de fuerzas	9
2.1.1. Ley de Glen	11
2.2. Desplazamiento de un glaciar	12
2.2.1. Velocidad de deformación	13
2.2.2. Velocidad de deslizamiento	14
2.3. Ecuación de continuidad integrada verticalmente	15
2.4. Modelo para un glaciar de valle	17
2.5. Leyes de Fick	21
3. Metodología	23
3.1. Métodos numéricos utilizados	23
3.1.1. Diferencias finitas	23

3.1.2.	Método de Euler	25
3.2.	Discretización del modelo	26
3.2.1.	Condiciones de borde	29
3.3.	Medida del paso temporal	29
3.4.	Calving	31
3.4.1.	Modelo de aguas profundas	33
3.4.2.	Modelo de flotabilidad modificado	33
4.	Resultados	36
4.1.	Glaciar de lecho lineal y ancho constante	36
4.1.1.	Simulaciones sin calving	37
4.1.2.	Simulaciones con desprendimientos: modelo de flotabilidad modificado	40
4.1.3.	Simulaciones con desprendimientos: modelo de aguas profundas	44
4.2.	Glaciar de lecho sinuoso	46
4.2.1.	Respuesta a un cambio climático	48
4.2.2.	Experimento 4: Modelo de flotabilidad modificado	50
4.2.3.	Experimento 5: Modelo de aguas profundas	54
5.	Discusiones	58
5.1.	Efectos numéricos en la discretización de las ecuaciones	58
5.2.	Reproducción de los desprendimientos	59

Índice de cuadros

4.1. Parámetros utilizados en la simulación de un glaciar con lecho lineal y ancho constante, para $n = 3$	37
4.2. Parámetros utilizados en la simulación de un glaciar con lecho lineal y ancho constante, para $n = 3$	46

Índice de figuras

2.1. Losa de hielo infinita de espesor H , apoyada en un plano que forma un ángulo θ respecto al geoide. En el sistema de coordenadas elegido el vector aceleración de gravedad está dado por $\mathbf{g} = g \sin \theta \hat{x} - g \cos \theta \hat{z}$, donde \hat{x} y \hat{z} son vectores unitarios en las direcciones x y z , respectivamente; y g es el módulo de \mathbf{g}	10
2.2. Sistema de referencia usado para resolver las ecuaciones en un glaciar de valle. La sección transversal de éste se ha aproximado utilizando trapecios, cada uno ligado a un punto del eje x	17
2.3. Sección transversal de un glaciar de valle y su representación utilizando un trapecio.	18
3.1. Confección de la rejilla en torno al punto (i, k) , utilizando la evaluación del tipo II. Los círculos corresponden a puntos intermedios de la rejilla en la dirección x . En la evaluación del tipo I se estima la difusividad en esos puestos en lugar de los puntos discretos.	27
3.2. Perfil lateral del glaciar entre dos puntos contiguos de la rejilla. Los valores en el punto i' se estiman mediante una interpolación lineal entre los dos puntos más cercanos de la antigua rejilla.	32

3.3.	Estimación de la nueva posición del frente glaciar i'_{edge} al utilizar el modelo de flotabilidad modificado, luego de ocurrido un desprendimiento. El frente actualizado se calcula mediante una interpolación lineal del espesor del glaciar y el espesor crítico entre los dos puntos más cercanos de la antigua rejilla, que son $i_{\text{edge}} - 1$ e i_{edge} . La abscisa del punto de intersección entre estas dos rectas estimadas corresponde a la posición del nuevo frente.	35
4.1.	Ajuste lineal del balance de masa al utilizar la ecuación (4.2). Los puntos son los datos medidos para el Glaciar O'Higgins y la recta corresponde a la interpolación. Las líneas punteadas están emplazadas donde la elevación y el balance de masa son nulos, para los cuales se han señalado sus valores máximos $h_{\text{máx}}$ y $\dot{b}_{\text{máx}}$, respectivamente.	38
4.2.	Glaciar de lecho lineal y ancho constante en equilibrio, resuelto usando las formas del tipo I y II.	39
4.3.	Glaciar de lecho lineal y ancho constante en equilibrio para diferentes valores de Δx , utilizando la forma de la solución tipo II.	39
4.4.	Evolución en el tiempo del largo del glaciar de lecho lineal sin calving para diferentes valores de Δx	40
4.5.	Modelo de flotabilidad modificado para un glaciar en equilibrio, de ancho constante y pendiente lisa, estimando la difusividad de las formas tipo I y II. La línea de equilibrio se sitúa a 1450 m y la superficie del agua a 250 m de altitud. El ancho inicial de la rejilla es de $\Delta x = 200$ m, con $\delta x = 5$ m de desviación máxima al reajustar el ancho de ésta tras un desprendimiento.	41
4.6.	Modelo de flotabilidad modificado para un glaciar en equilibrio, de ancho constante y pendiente lisa, estimando la difusividad de las formas tipo I y II. La línea de equilibrio se sitúa a 1450 m y la superficie del agua a 250 m de altitud. $\Delta x \approx 200$ m.	43
4.7.	Modelo de flotabilidad modificado para la forma del tipo II utilizando diferentes valores de Δx , aplicado al glaciar de lecho lineal.	45

4.8. Evolución en el tiempo del largo del glaciar de lecho lineal utilizando el modelo de flotabilidad modificado para diferentes valores de Δx	45
4.9. Glaciar de lecho lineal en equilibrio, utilizando el modelo de aguas profundas y resuelto para las formas del tipo I y II.	47
4.10. Modelo de aguas profundas resuelto para la forma del tipo I, usando diferentes valores para el ancho de la rejilla Δx	48
4.11. Evolución del largo del glaciar a través del tiempo, medido con respecto al eje x . Utilizando el modelo de aguas profundas (línea azul) y el modelo de flotabilidad modificado (línea roja).	49
4.12. Evolución en el tiempo del largo del glaciar de lecho lineal utilizando el modelo de aguas profundas para diferentes valores de Δx	50
4.13. Glaciar de lecho sinuoso con producción de témpanos en equilibrio, utilizando el modelo de flotabilidad modificado (línea continua) y el modelo de aguas profundas (línea discontinua).	51
4.14. Glaciar de lecho sinuoso estabilizado tras aumentar la altitud de la línea de equilibrio en 75 m hasta un valor de 1525 m, utilizando el modelo de flotabilidad modificado. La línea discontinua representa el estado del glaciar antes de su retroceso.	52
4.15. Glaciar de lecho sinuoso estabilizado tras aumentar la altitud de la línea de equilibrio en 75 m hasta un valor de 1600 m, utilizando el modelo de flotabilidad modificado. La línea punteada representa el estado del glaciar antes de su nuevo retroceso y la línea discontinua constituye la posición de éste antes de su desintegración tras ingresar en aguas profundas.	52
4.16. Perfiles del glaciar de lecho sinuoso para seis diferentes estados de equilibrio, utilizando el modelo de flotabilidad modificado. El primero corresponde al estado inicial del glaciar y los restantes se obtienen luego de aumentar repetidamente la elevación de la línea de equilibrio en 150 m.	53
4.17. Evolución del largo total del glaciar de lecho sinuoso a través del tiempo, medido con respecto al eje x ; utilizando el modelo de flotabilidad modificado.	55

4.18. Evolución del largo total del glaciar de lecho sinuoso a través del tiempo, medido con respecto al eje x ; utilizando el modelo de aguas profundas (línea azul) y el modelo de flotabilidad modificado (línea roja).	56
4.19. Longitud del glaciar durante la fase de desintegración ocurrida al utilizar el modelo de flotabilidad modificado.	56
4.20. Glaciar de lecho sinuoso estabilizado tras aumentar la altitud de la línea de equilibrio en 75 m hasta un valor de 1525 m, utilizando el modelo de aguas profundas. La línea punteada representa el estado del glaciar antes de su retroceso y la línea discontinua cuando se acelera la velocidad de repliegue.	57
4.21. Perfiles del glaciar de lecho sinuoso para seis diferentes estados de equilibrio, utilizando el modelo de aguas profundas. El primero corresponde al estado inicial del glaciar y los restantes se obtienen luego de aumentar repetidamente la elevación de la línea de equilibrio en 150 m.	57

Resumen

La mayor parte de la masa de hielo glaciar perdida en el planeta se debe a desprendimiento de témpanos cuando el frente de un glaciar se encuentra sumergido en un cuerpo de agua. Las observaciones sugieren que la pérdida de hielo debido a producción de témpanos es más fuerte cuando se incrementa la profundidad del agua junto al glaciar. Los dos modelos aquí utilizados, el de aguas profundas y el de flotabilidad modificado, se basan en este principio. Enunciado de una forma simple, el tamaño del desprendimiento de hielo es directamente proporcional a la profundidad del agua exactamente en el frente del glaciar.

Para reproducir el desplazamiento de un glaciar de valle se utiliza un modelo unidimensional basado en la ecuación de continuidad integrada verticalmente. Se realizan experimentos con dos formas diferentes de discretizar este modelo para su resolución numérica, en combinación con los dos modelos anteriormente mencionados para reproducir la generación de témpanos y con diferentes tamaños de separación entre los puntos discretos del dominio elegido.

Los resultados arrojados sugieren que la discretización que es numéricamente menos precisa resulta la más conveniente de utilizar al requerir una menor cantidad de iteraciones, solución que puede ser mejorada considerablemente recalculando los valores en el borde del glaciar mediante una aproximación en serie de Taylor.

Además, se concluyó que el modelo de flotabilidad modificado reproduce de modo más realista la pérdida de hielo debido a desprendimientos. Sin embargo, no fue posible lograr un resultado que sea independiente de la distancia de separación entre los puntos discretos del dominio utilizado para la resolución numérica.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Cambio climático

El clima de la Tierra está en constante cambio, a lo largo de su historia ha pasado de ser un planeta de fuego a un planeta de hielo (Tierra bola de nieve), climas cálidos donde las regiones polares permanecieron libres de hielo y climas fríos con vastas capas de hielo cubriendo los continentes. Hay varios factores que determinan el clima del planeta, como la reflectividad solar debido a la presencia de hielo, nubosidad y gases de efecto invernadero (dióxido de carbono, vapor de agua, ceniza volcánica, etc.); o la distribución global de las masas de tierra como consecuencia de la deriva continental, que delimita la trayectoria de las corrientes marinas y la distribución del calor en el planeta. También existen otros factores causados por cambios en la órbita terrestre, como su excentricidad, que induce en la cantidad de radiación solar que alcanza la Tierra, y la inclinación respecto a su eje que se ve plasmado en la inclemencia de las estaciones del año.

Incluso durante el último milenio han ocurrido importantes cambios climáticos, como el período cálido medieval; un lapso del clima extraordinariamente caluroso que comenzó en el siglo X y culminó en el siglo XIV. Luego de eso vino la «Pequeña Edad de Hielo», un período frío que abarcó desde comienzos del siglo XIV hasta mediados del siglo XIX, al cual le siguió el clima caluroso de la actualidad. Existe el debate de si el final de la Pequeña Edad de Hielo —y el consecuente calentamiento global que continúa en la

actualidad— se debió en mayor medida a causas naturales o si es responsabilidad de la actividad antrópica iniciada con la revolución industrial, que contribuyó a aumentar los niveles de dióxido de carbono.

1.1.1. Nivel del mar

Un cambio climático impacta tanto directamente como indirectamente a un aumento o disminución del nivel del mar. El *Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC) estima que el nivel del mar podría subir entre 9 y 88 cm hacia fines del presente siglo, debido a un aumento de la temperatura global entre 1,4 y 5,8 °C. Estas cifras significan un futuro adverso para la población que vive en zonas costeras, donde se sitúan algunas de las grandes ciudades del mundo, y merecen especial atención los países islas del Océano Pacífico, que podrían desaparecer completamente. De allí la importancia de estudiar el comportamiento de los glaciares, que además proporcionan un registro del clima del pasado remoto (paleoclimatología).

Este aumento en el nivel del mar es consecuencia de un incremento en la temperatura de la atmósfera terrestre, y se debe a dos razones:

- Una mayor fusión de los hielos continentales perennes del planeta, ya sean glaciares, campos de hielo o un *inlandsis* (actualmente sólo en Groenlandia y la Antártica).
- Expansión termal de los océanos. De acuerdo al IPCC, este mecanismo es el principal contribuyente al aumento del nivel del mar.

No obstante, un calentamiento global también contribuye a una disminución del nivel del mar, debido a otras dos razones:

- Incremento en las precipitaciones de nieve debido a una mayor humedad del aire, producto de un aumento en la temperatura, siempre que ésta siga siendo lo suficientemente baja.
- Rebote isostático: una consecuencia del principio de Arquímedes. Una menor carga de hielo conlleva a un ascenso de la superficie terrestre hasta alcanzar un nuevo estado de equilibrio.

1.2. Glaciares

De las variadas definiciones sobre un glaciar, una de las más aceptadas fue dada por Lliboutry, quien lo enuncia como toda masa de hielo perenne, formada por acumulación de nieve, cualquiera sean sus dimensiones y formas. Cuando el glaciar adquiere cierto espesor, fluye bajo su propio peso hacia alturas inferiores (Lliboutry, 1956).

Para que se forme un glaciar, es necesario que la cantidad de nieve acumulada a lo largo de un año sea mayor a la que se derrita durante el mismo período. Año tras año, las capas más profundas de esa nieve se van compactando producto de la gravedad hasta convertirse en hielo glaciar. Cuando el glaciar ha adquirido ciertas dimensiones, comienza a fluir pendiente abajo debido a su propio peso. A medida que el glaciar desciende, ocurren los siguientes procesos:

- Deformación interna que ocurre cuando el hielo se deforma producto de los esfuerzos internos.
- Deslizamiento o lubricación en la base, que ocurre cuando la temperatura basal alcanza el punto de fusión, disminuyendo el roce que existe entre el glaciar y la superficie donde se apoya éste. Se da principalmente en glaciares templados; en glaciares fríos puede no ocurrir este fenómeno.

A medida que el glaciar desciende ladera abajo de una montaña, va modelando y dando forma al paisaje. Conforme avanza, erosiona el terreno que se ubica debajo y el material arrancado se va acumulando en su frente, proceso que se conoce como deposición.

1.2.1. Balance de masa

Se define balance de masa como la suma algebraica entre los montos de acumulación y de ablación. Si ella es positiva, el glaciar aumenta su masa; si es negativa, su masa disminuye (Cuffey y Paterson, 2010).

La acumulación es la ganancia de masa de un glaciar y ocurre comúnmente en forma de nieve caída. Otras formas de acumulación lo pueden constituir las avalanchas, agua

infiltrada que luego se congela en las profundidades, granizo o cualquier forma de hielo que se deposite en el glaciar.

La ablación consiste en la pérdida de masa de un glaciar cualquiera sea la forma, ya sea mediante fusión, evaporación, sublimación o *calving*. El mecanismo de ablación dominante depende del tipo de glaciar.

Suele referirse como balance de masa superficial cuando el aporte se debe a factores climáticos y como balance de masa total al incluir el *calving*.

1.3. *Calving*

Cuando el frente de un glaciar entra en contacto con algún cuerpo de agua, se produce un fenómeno conocido como *calving*, que consiste en la ruptura y desprendimiento de masa de distintos tamaños en el frente del glaciar. Estos trozos de hielo (témpanos o *icebergs*) pueden flotar durante mucho tiempo antes de derretirse completamente y viajar hasta lugares distantes desde su sitio de origen.

Sólo una fracción de todos los glaciares en el mundo terminan sobre un cuerpo de agua y, por lo tanto, ser sometidos a un proceso de *calving*. Sin embargo, el *calving* es el mecanismo de ablación dominante en los glaciares en contacto con agua, pudiendo ocasionar una pérdida de masa de hielo muy superior a la que pueden llegar a perder debido a ablación superficial (Van der Veen, 1996). Anualmente se añaden 3000 Gton de agua equivalente a los glaciares de todo el mundo en acumulación y se remueven en total unos 2400 Gton debido a *calving*, mientras que lo perdido debido a ablación superficial es sólo un tercio de lo que se acumula (IPCC, 2001). Se estima que casi la mitad del hielo perdido de Groenlandia es debido a *calving* en los glaciares que terminan en los numerosos fiordos que posee (Reeh y col., 1999). Mientras que en la Antártica el *calving* es visible en la ruptura de las plataformas de hielo de la Península Antártica.

El tipo de *calving* observado depende de dos factores, si el glaciar es frío o templado y si su frente se encuentra apoyado en el fondo del agua o flotando en ella. Luego, existen cuatro combinaciones posibles. Sin embargo, las que predominan son sólo dos ellas. Pues, lo normal es que los glaciares polares y subpolares posean una lengua de hielo flotante, mientras que no se conoce la existencia de glaciares templados en donde la

lengua mantenerse a flote sin desintegrarse (Nick, 2006). Este último tipo de glaciares y calving es el que se aborda en el presente trabajo.

A pesar de la evidencia de este fenómeno, la relación entre el calving y el retroceso de los glaciares no es bien comprendida; no existe una relación analítica que describa el fenómeno con exactitud (p.ej. Nick, 2006).

1.3.1. Velocidad de desprendimiento

Se define la velocidad de desprendimiento de témpanos de hielo como el volumen de hielo desprendido por unidad de tiempo y por unidad de superficie lateral en la lengua terminal del glaciar (Cuffey y Paterson, 2010). Dicho de otra forma, es la velocidad de retroceso de un glaciar debido a *calving*.

A partir de las observaciones se ha inferido que la profundidad del agua en el frente del glaciar afecta fuertemente la velocidad de desprendimiento, siendo mayor cuando el glaciar acaba en aguas profundas (Post, 1975). Este tipo de glaciares son esencialmente inestables, mostrando ciclos de avance y retroceso que no están relacionados directamente con un cambio climático (Clarke, 1987). En cambio, se ha demostrado que estos ciclos dependen principalmente de la geometría del fiordo a través del cual se desplaza el glaciar (Mercer, 1961). De allí los diferentes comportamientos observados en glaciares contiguos que fluyen desde un mismo campo de hielo.

1.4. Ciclo de un glaciar que produce témpanos

Post (1975), basado en observaciones de los glaciares templados de Alaska, describió cuatro fases para un glaciar que produce témpanos: (I) avance, (II) equilibrio extendido, (III) retroceso drástico y (IV) equilibrio retraído.

Un avance de este tipo de glaciares se produce cuando se logra acumular suficiente sedimento para formar una morrena frontal que reduce la profundidad del agua en el frente glaciar y, por consiguiente, disminuye sustancialmente la velocidad de desprendimiento. Con una menor producción de témpanos se consigue un balance de masa positivo que permite que el glaciar aumente su volumen y, de esta forma, avanzar a través del fiordo. No obstante, el glaciar sólo avanzará mientras la morrena también lo haga, por lo que

el avance es lento. Este depende de cuán rápido el material es erosionado y acumulado frente a la lengua glaciaria (Nick, 2006), además de la geometría del fiordo. Durante esta fase el glaciar es relativamente insensible al clima imperante.

Cuando el avance se frena, viene una etapa de estabilización en la cual el glaciar vuelve a ser sensible al clima, en comparación a su velocidad de desprendimiento. Su frente se apoya sobre la morrena que se formó durante su avance, limitando la masa perdida por desprendimientos.

El glaciar se mantiene estable hasta que es perturbado por un cambio climático desfavorable. Una vez que el glaciar comienza a retroceder se desplaza hacia aguas más profundas, pues la morrena frontal formada permanece en la ubicación alcanzada en la fase anterior. Una mayor profundidad del agua en el frente del glaciar conlleva a un aumento de la velocidad de desprendimiento, por lo que el balance de masa total disminuye considerablemente. El retroceso suele ser muy drástico o incluso puede ocurrir un colapso, dependiendo de la configuración del fiordo. En esta fase el glaciar es comparativamente insensible al clima, ya que la velocidad de desprendimiento supera con creces a la velocidad de flujo (Nick, 2006).

El retroceso continúa hasta un lugar donde el fiordo es menos profundo o más estrecho, lo que permite reducir la velocidad de desprendimiento y alcanzar un nuevo equilibrio. La diferencia de esta fase con el estado de «equilibrio extendido» es que aquí la superficie que abarca la zona de acumulación es mucho mayor respecto al área total del glaciar. Pues, durante su retroceso el glaciar pierde gran parte de su masa ubicada en la zona de ablación superficial.

La estabilización del glaciar permite la formación de una nueva morrena frontal que reduce la velocidad de desprendimiento y comienza un nuevo ciclo de avance.

1.5. Objetivos

General

- Reproducir satisfactoriamente la evolución de un glaciar de valle que pierde masa principalmente mediante el desprendimiento de témpanos.

Específicos

- Escoger la discretización más conveniente para resolver numéricamente la ecuación de continuidad integrada verticalmente.
- Examinar el comportamiento del glaciar al aplicar los modelos de calving bajo diferentes circunstancias: avance y retroceso del glaciar en aguas de profundidad variable.
- Investigar la existencia de una dependencia de la discretización en los modelos y su relevancia en el resultado de la simulación. Intentar corregir las deficiencias que se puedan presentar.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Balance de fuerzas

Para un fluido, se puede obtener un balance de las fuerzas que actúan sobre él utilizando las ecuaciones de Euler (leyes de Newton para medios continuos). Considerando el glaciar como un fluido incompresible y no newtoniano (viscosidad variable), y asumiendo que su peso es la única fuerza de cuerpo que interviene en el problema, la aceleración neta que sufre está dada por

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial r_j} + g_i, \quad (2.1)$$

donde τ_{ij} representa cada una de las componentes del tensor de tensiones y g_i las del vector \mathbf{g} asociado a la aceleración de gravedad. En tanto, v_i y r_i son las componentes de la velocidad y del vector posición dado por (x, y, z) , respectivamente. Si se considera el desplazamiento de un glaciar como «muy lento», la aceleración neta que sufre la masa de hielo es despreciable; es decir $dv_i/dt \approx 0$, y la ecuación (2.1) se reduce a un balance entre el gradiente de las tensiones y la aceleración de gravedad.

Para una masa de hielo de extensión infinita y espesor H constante, apoyado en una superficie plana que forma un ángulo de inclinación θ respecto al geoide. Se puede resolver la ecuación (2.1) en un sistema de coordenadas cartesiano alineado respecto a la

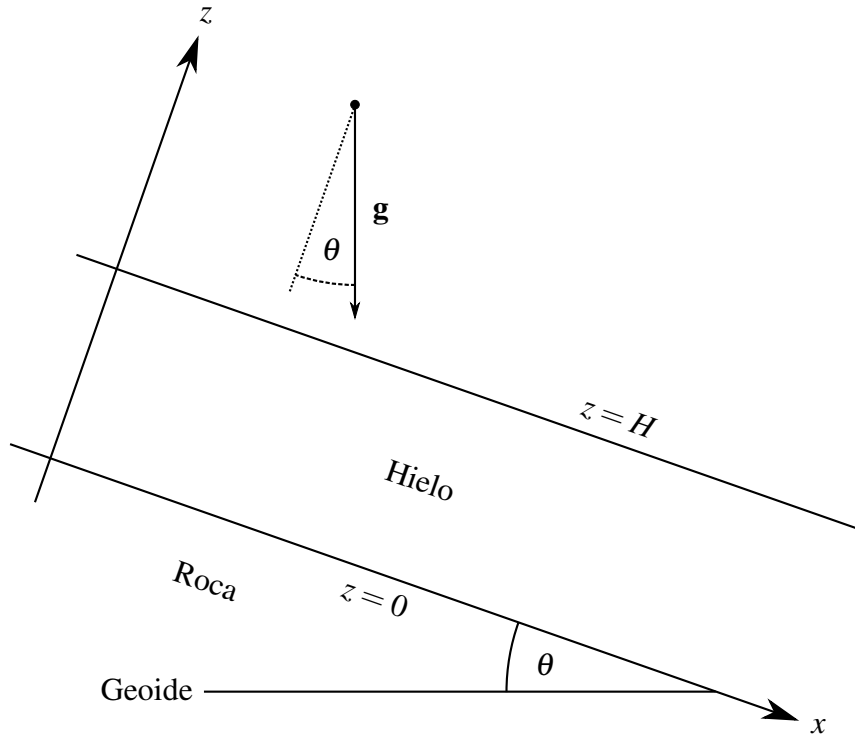


Figura 2.1. Losa de hielo infinita de espesor H , apoyada en un plano que forma un ángulo θ respecto al geoide. En el sistema de coordenadas elegido el vector aceleración de gravedad está dado por $\mathbf{g} = g \sin \theta \hat{x} - g \cos \theta \hat{z}$, donde \hat{x} y \hat{z} son vectores unitarios en las direcciones x y z , respectivamente; y g es el módulo de \mathbf{g} .

dirección del flujo del hielo, como lo muestra la figura 2.1, obteniendo

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g \sin \theta = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g \cos \theta = 0; \quad (2.4)$$

para los ejes x , y y z , respectivamente.

Debido a que el trozo de hielo posee una superficie infinita, existe simetría en los

ejes x e y , por lo que todas las derivadas respecto a esas coordenadas se anulan. Luego, la ecuación (2.2) se reduce a

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g \sin \theta = 0. \quad (2.5)$$

Integrando esta última ecuación a través del espesor del hielo, y despreciando el esfuerzo producido por el viento, obtenemos el esfuerzo cortante dado por la función

$$\tau_{xz}(z) = (H - z) \rho g \sin \theta, \quad (2.6)$$

cuyo dominio es $0 \leq z \leq H$, medido desde la base del glaciar.

2.1.1. Ley de Glen

Para una losa de hielo apoyado en una superficie suave, se ha encontrado que existe una relación no lineal entre la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}_{ij}$ y las tensiones (o esfuerzos) que sufre el hielo, la que se conoce como ley de Glen.

Resultados experimentales sugieren que esta relación es de la forma

$$\dot{\epsilon} = A \tau^n, \quad (2.7)$$

donde A y n son parámetros de flujo. Los datos experimentales no son concluyentes al respecto y cualquier valor para n entre 2 y 4 se considera correcto, pero típicamente se asigna $n = 3$ (Oerlemans, 2001). El parámetro A es dependiente de la temperatura, pero por simplicidad se lo considera constante (Van den Berg y col., 2006).

Para un trozo de hielo incompresible, si se asume que las componentes de la velocidad de deformación y las componentes del esfuerzo son proporcionales en un factor χ no constante, la combinación con la ecuación (2.7) produce la relación

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A \tau^{n-1} \tau_{ij} \quad (2.8)$$

conocida como generalización de la ley de Glen, hecha por Nye (1953). Para la geometría

aquí utilizada, las derivadas en x son cero, por lo que la ecuación (2.8) se reduce a

$$\frac{du}{dz} = 2A \tau_{xz}^n. \quad (2.9)$$

Sustituyendo la expresión obtenida para el esfuerzo cortante —ecuación (2.6)— en la relación anterior, se obtiene

$$\frac{du}{dz} = 2A [(H - z) \rho g \sin \theta]^n; \quad (2.10)$$

ecuación a partir de la cual se elabora una expresión que describe el desplazamiento del glaciar pendiente abajo.

2.2. Desplazamiento de un glaciar

La deformación que sufre el glaciar en su descenso a causa del esfuerzo cortante, ocasiona que la velocidad del hielo varíe de forma no lineal respecto a la altura. Se puede obtener un perfil vertical de la velocidad del glaciar integrando la ecuación (2.10), lo que da como resultado

$$u(z) = u_0 + \underbrace{\frac{2A}{n+1} (\rho g \sin \theta)^n [H^{n+1} - (H - z)^{n+1}]}_{\text{velocidad de deformación}}, \quad (2.11)$$

donde $u_0 = u(0)$ es la velocidad que experimenta la base del glaciar; es decir, la velocidad de deslizamiento (p.ej. Oerlemans, 2001; Cuffey y Paterson, 2010).

Dado que la velocidad u del glaciar depende del espesor H y la pendiente del terreno θ , los que a su vez varían espacialmente a lo largo del eje x , se tiene que $u = u(x, z)$.

Sea $u(x) = \bar{u}(x, z)$; se puede estimar un promedio vertical de la velocidad del glaciar

mediante el teorema del valor medio, obteniendo

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{H} \int_0^H u(x, z) dz \\
 &= u_0 + \frac{1}{H} \int_0^H \frac{2A}{n+1} (\rho g \sen \theta)^n [H^{n+1} - (H-z)^{n+1}] \\
 &= u_0 + \frac{1}{H} \frac{2A}{n+1} (\rho g \sen \theta)^n \left(\frac{n+1}{n+2} H^{n+2} \right) \\
 &= u_0 + \underbrace{\frac{2A}{n+2} (\rho g \sen \theta)^n H^{n+1}}_{\text{velocidad de deformación promedio}}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2.1. Velocidad de deformación

Cuando un glaciar alcanza cierta cantidad de masa adquiere las propiedades de un fluido para lapsos de tiempo largos, mientras que en el corto plazo se comporta como un sólido plástico. Es esta propiedad la que permite principalmente que el glaciar se mueva montaña abajo. Este desplazamiento es la componente debido a deformación en la velocidad total del glaciar.

Se define el esfuerzo de conducción como el esfuerzo cortante en la base del glaciar (Oerlemans, 2001; Cuffey y Paterson, 2010); es decir,

$$\tau_d = \tau_{xz}(0) = \rho g H \sen \theta. \tag{2.13}$$

Debido a que los parámetros de flujo A y n se consideran constantes, éstos se pueden agrupar en un único *parámetro de deformación* (Oerlemans, 2001; Cuffey y Paterson, 2010)

$$f_d = \frac{2A}{n+2}. \tag{2.14}$$

Entonces, se puede reescribir la *velocidad de deformación promedio* como

$$u_d = f_d H \tau_d^n. \tag{2.15}$$

2.2.2. Velocidad de deslizamiento

El deslizamiento de un glaciar ocurre cuando hay agua en su base, siendo un proceso más complejo que la deformación al involucrar varios factores. Cuando el hielo se encuentra con un obstáculo, ocurre derretimiento debido a una mayor presión que reduce el punto de fusión. En el tiempo que el hielo ha cruzado el obstáculo hacia el lado contrario la presión se reduce y el agua se vuelve a congelar. Este proceso se conoce como regelación (Weertman, 1957). Sin embargo, si el obstáculo es grande también ocurre deformación.

En muchos glaciares se observa un aumento de la velocidad durante el verano, cuando entra más agua en ellos. Sin embargo, cuando se estudia la evolución de un glaciar durante largos períodos de tiempo, se puede observar un comportamiento más o menos constante.

A partir de esto, Budd y col. (1979) formularon una ley empírica conocida como ley de deslizamiento del «tipo Weertman», de la forma

$$u_s = c \frac{\tau_d^n}{(\rho g H - p)}, \quad (2.16)$$

donde c es una constante que depende de las características físicas del lecho glaciar, p es la presión del agua en la base y n es el mismo parámetro de flujo definido anteriormente. Esta expresión es válida para un glaciar apoyado en la superficie terrestre, pues si la lengua de hielo comienza a flotar (como en una plataforma de hielo) la presión del agua se iguala con la presión ejercida por la carga de hielo y el valor de u_s queda indeterminado (Oerlemans, 2001).

El valor para la presión de agua es un dato que normalmente no está disponible, por lo que se asume que es una fracción constante de la presión ejercida por la carga de hielo. Luego, los parámetros relacionados con el deslizamiento se agrupan en una única constante f_s denominada *parámetro de deslizamiento*. Entonces, la ecuación (2.16) puede ser reescrita como

$$u_s = f_s \frac{\tau_d^n}{H}. \quad (2.17)$$

2.3. Ecuación de continuidad integrada verticalmente

La ecuación de continuidad es una ley de conservación de la masa, es decir, la cantidad de masa que entra en un sistema es la misma que sale de él. En mecánica de fluidos puede ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{v} = (u, v, w)$ es la velocidad de flujo, ρ la densidad y t el tiempo. Para un glaciar incompresible la densidad permanece constante, por lo que la ecuación (2.18) se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.19)$$

Luego, integrando la ecuación (2.19) verticalmente desde la base del glaciar ubicado a una altura $z = b$ hasta su superficie en h , se obtiene

$$\int_b^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_b^h \frac{\partial v}{\partial y} dz + w(h) - w(b) = 0. \quad (2.20)$$

Aplicando la regla de Leibniz para la derivación de un producto, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_b^h u dz - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + u(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \\ \frac{\partial}{\partial y} \int_b^h v dz - v(h) \frac{\partial h}{\partial y} + v(b) \frac{\partial b}{\partial y} + \\ w(h) - w(b) = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por definición, las velocidades en la superficie y en la base del glaciar son, respectivamente,

$$w(h) = \frac{dh}{dt} - \dot{b}(h) \quad \text{y} \quad w(b) = \frac{db}{dt} - \dot{b}(b). \quad (2.22)$$

Aquí, $\dot{b}(h)$ y $\dot{b}(b)$ son los correspondientes balances de masa por unidad de área en la superficie y la base del glaciar. En la base, este balance consiste en fusión o acreción (Oerlemans, 2001).

Luego, utilizando la definición de derivada material o sustancial, pero solamente en

el plano horizontal (a lo largo de los ejes x e y), se tiene que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \underbrace{u(h)\frac{\partial h}{\partial x} + v(h)\frac{\partial h}{\partial y}}_{\text{advección}} \quad (2.23)$$

y de forma equivalente para $\frac{db}{dt}$. Por lo tanto, las ecuaciones (2.22) se pueden reescribir, ahora en función de la advección, como

$$u(h)\frac{\partial h}{\partial x} + v(h)\frac{\partial h}{\partial y} = w(h) + \dot{b}(h) - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.24)$$

y

$$u(b)\frac{\partial b}{\partial x} + v(b)\frac{\partial b}{\partial y} = w(b) + \dot{b}(b) - \frac{\partial b}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Posteriormente, reemplazando estos términos advectivos en la ecuación (2.21), reordenando y agrupando, se consigue la siguiente forma para la ecuación de continuidad integrada verticalmente:

$$\frac{\partial(h-b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^h u \, dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^h v \, dz + \dot{b}(h) - \dot{b}(b). \quad (2.26)$$

u y v son las componentes de la velocidad del hielo en el plano horizontal. Al igual que en la sección 2.2, se utiliza un promedio para estas componentes al realizar la integración a través del eje vertical. Por otra parte, por razones prácticas se desprecia el balance de masa en la base del glaciar (Oerlemans, 2001).

Si el espesor del glaciar es $H = h - b$, se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial(uH)}{\partial x} - \frac{\partial(vH)}{\partial y} + \dot{b} \quad (2.27)$$

es la ecuación de continuidad integrada verticalmente, donde u y v es la velocidad promedio del glaciar en las componentes x e y del plano cartesiano, respectivamente.

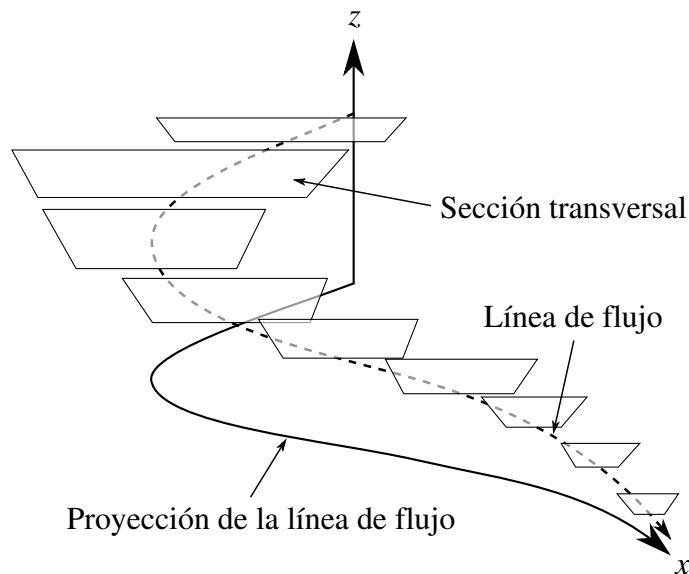
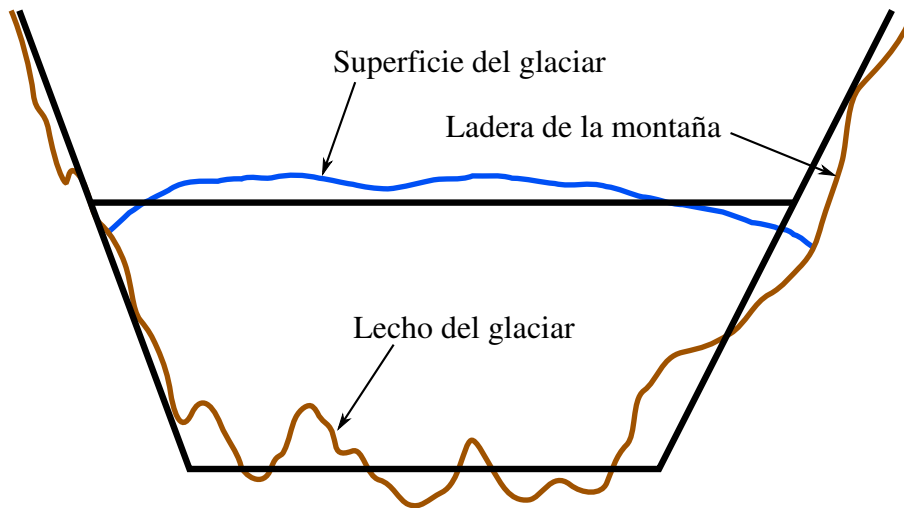


Figura 2.2. Sistema de referencia usado para resolver las ecuaciones en un glaciar de valle. La sección transversal de éste se ha aproximado utilizando trapecios, cada uno ligado a un punto del eje x .

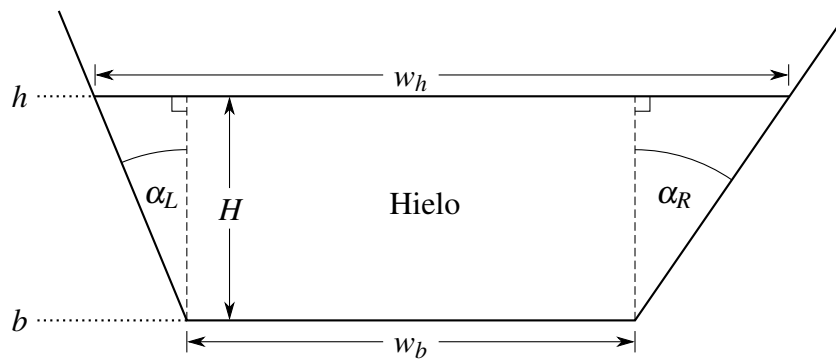
2.4. Modelo para un glaciar de valle

Con las ecuaciones expuestas anteriormente es suficiente para desarrollar un modelo que describa la evolución de un glaciar de valle. En este tipo de glaciares, el hielo se encuentra confinado por las laderas de las montañas y el movimiento ocurre casi totalmente siguiendo el recorrido del valle aguas abajo. Luego, se define una «línea de flujo principal» que describe la trayectoria general del glaciar (Oerlemans, 1986). Por lo tanto, conviene resolver la ecuación (2.27) en un sistema de referencia donde el eje x coincida con la proyección de esta línea de flujo sobre el geoide, mientras que el eje y es perpendicular al eje x en el plano horizontal (formado por el geoide) y el eje z es paralelo a la aceleración de gravedad (p.ej. Oerlemans, 2001), como se expone en la figura 2.2.

El siguiente paso consiste en integrar lateralmente la ecuación (2.27), abarcando el ancho del glaciar. Debido a que su desplazamiento ocurre en gran medida a lo largo de la trayectoria de la línea de flujo principal, es válida la aproximación $v \approx 0$. Esta integración



(a) Aproximación para la sección transversal del glaciar.



(b) Geometría de la sección transversal y sus parámetros relacionados.

Figura 2.3. Sección transversal de un glaciar de valle y su representación utilizando un trapecio.

da como resultado una ecuación que describe la evolución del glaciar en una sección transversal de área S (Oerlemans, 2001), descrita por

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial(\bar{u}S)}{\partial x} + \int \dot{b} \, dy. \quad (2.28)$$

Aquí, la velocidad u se ha sustituido por \bar{u} , que es la velocidad promedio con la que se desplaza la sección transversal S .

Los valles de montaña que albergan o alguna vez alojaron un glaciar presentan una típica forma de «U» un tanto más abierta hacia arriba, consecuencia del continuo desgaste ocasionado por la masa de hielo a medida que fluye ladera abajo. El fondo de este tipo de valles es habitualmente llano y ancho, flanqueado por montañas abruptas.

De acuerdo a esta observación, una buena estimación de la sección transversal de un glaciar es aproximarla a un trapecio (p.ej. Oerlemans, 2001; Cuffey y Paterson, 2010), de modo que su base inferior será el fondo del valle donde se apoya el glaciar y la base superior se corresponderá con la superficie de éste. Luego, la altura de este trapecio será el espesor del hielo y el área de la sección transversal estará dada por

$$S = \frac{w_b + w_h}{2} H, \quad (2.29)$$

donde w_b y w_h son el ancho del glaciar en su base y en la superficie, respectivamente, cuyos valores dependen de la posición a lo largo de éste. No obstante, el ancho en la superficie del glaciar también es dependiente de la altura a la que se encuentre, puesto que a más altitud mayor es la abertura del valle. Luego, esta medida es directamente proporcional a su espesor, mediante un parámetro λ (Oerlemans, 1997). Así, se establece una relación entre w_b y w_h dada por

$$w_h = w_b + \lambda H. \quad (2.30)$$

De acuerdo a Zuo y Oerlemans (1997), una forma de estimar el valor del parámetro λ es obteniendo un ángulo de declinación α_L y α_R respecto de la vertical para las laderas de la montaña izquierda y derecha, respectivamente, que albergan al glaciar (ver figura 2.3b).

Luego,

$$\lambda = \tan \alpha_L + \tan \alpha_R. \quad (2.31)$$

El conjunto de secciones transversales que dan volumen al glaciar no necesariamente lo conformarán trapecios semejantes entre sí, lo que significa que λ es un parámetro que depende de x . Por consiguiente, el área la sección transversal es descrita por la función

$$S(x,t) = H \left(w_b + \frac{1}{2} \lambda H \right). \quad (2.32)$$

Con esta geometría ahora es posible estimar el valor del 3^{er} término de la ecuación (2.28) que es igual a

$$\int \dot{b} \, dy = w_b \dot{b} = (w_b + \lambda H) \dot{b}. \quad (2.33)$$

Si se sustituye la ecuación (2.32) en (2.28), se aplica la regla de Leibniz para la derivación de un producto y posteriormente se reordena en función de la tasa de cambio del espesor promedio, se obtiene la ecuación de continuidad integrada verticalmente y lateralmente,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{-1}{w_b + \lambda H} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(w_b + \frac{1}{2} \lambda H \right) \bar{u} H \right] + \dot{b}, \quad (2.34)$$

que describe la evolución de un glaciar de valle a través del tiempo y a lo largo de una línea de flujo principal (Oerlemans, 1997). Con esta parametrización la resolución del problema se reduce a una dimensión, pero con las tres dimensiones involucradas de manera implícita.

En la sección 2.2 se encontró una expresión para la velocidad de un glaciar promediada verticalmente y que incluye contribuciones procedentes del deslizamiento basal (en la línea de flujo) y de la deformación interna del hielo; de la forma

$$u = u_d + u_s = f_d H \tau_d^n + \frac{f_s \tau_d^n}{H}. \quad (2.35)$$

Sin embargo, aquí la velocidad $u(x,y)$ posee una variación espacial en el plano xy , por lo que no puede ser sustituida directamente en la ecuación (2.34), pues $\bar{u}(x)$ sólo cambia a lo largo del eje x .

Debido a que el esfuerzo producido por las laderas del valle es importante, se puede estimar la velocidad de la sección transversal del glaciar incluyendo esta contribución lateral como una proporción del esfuerzo basal. Luego, se define el *esfuerzo efectivo*

$$\tau_b = f\tau_d \quad (2.36)$$

en todo el lecho del glaciar como una cantidad directamente proporcional al esfuerzo basal, mediante un «factor de forma» (Nye, 1965); parámetro que depende de la geometría de la sección transversal del glaciar, cuya velocidad de desplazamiento es

$$\bar{u} = f_d H \tau_b^n + \frac{f_s \tau_b^n}{H}, \quad (2.37)$$

expresión que puede ser sustituida en la ecuación (2.34).

2.5. Leyes de Fick

El flujo del glaciar cuesta abajo puede ser descrito como un proceso difusivo de acuerdo a las leyes de Fick. En este caso sólo existe difusión en la dirección del eje x , por lo que la 1ª y 2ª leyes adquieren la forma de

$$J = -D \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{y} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (2.39)$$

respectivamente; donde J se define como el flujo difusivo, D es el coeficiente de difusión y ϕ una función que describe el material o sustancia que sufre este proceso físico.

La pendiente que posee un glaciar de valle en su descenso es generalmente pequeña, por lo que es válida la aproximación

$$\text{sen } \theta \approx \tan \theta = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.40)$$

donde θ es el ángulo de elevación respecto al geoide (ver figura 2.1). Luego, la ecuación

ción (2.13) se puede reescribir como

$$\tau_d = -\rho g H \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.41)$$

Combinando las ecuaciones (2.41), (2.36), (2.37) y (2.34), se obtiene —después de reordenar—

$$\underbrace{\frac{\partial h}{\partial t}}_{\partial H / \partial t} = \frac{1}{w_b + \lambda H} \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \dot{b} \quad (2.42)$$

y que corresponde a la segunda ley de Fick integrada horizontalmente para la función $h(x, t)$, que describe la superficie del hielo respecto al eje x , siendo el material que se difunde en este caso.

$$D(x, t) = \left(w_b + \frac{1}{2} \lambda H \right) (f \rho g H)^n [f_d H^2 + f_s] \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{n-1} \quad (2.43)$$

es el coeficiente de difusión y

$$J = -D \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.44)$$

es el flujo difusivo o flujo de hielo para este caso particular. Por tanto, la ecuación (2.42) se puede reescribir como

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{-1}{w_b + \lambda H} \frac{\partial J}{\partial x} + \dot{b}. \quad (2.45)$$

Donde se ha de notar que $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Métodos numéricos utilizados

Las ecuaciones diferenciales implicadas se resuelven numéricamente utilizando los métodos más sencillos existentes. Esto significa que las funciones son evaluadas en un conjunto discreto de puntos en lugar de un continuo, los cuales son representados apropiadamente en una rejilla.

Al realizar una derivación se utiliza el método de las diferencias finitas y para la integración el de Euler. A continuación se presentan cada una de sus variantes.

3.1.1. Diferencias finitas

Si la función a resolver es continua y diferenciable en torno a un punto x , entonces se puede obtener el valor de la función en dicho punto mediante el teorema de Taylor, que consiste en una aproximación mediante una combinación lineal de una serie de polinomios, cuya suma normalmente converge hacia un valor si es que se cumplen a lo menos las condiciones anteriormente mencionadas.

Se realiza una expansión de serie de Taylor para la función $f(x)$ en torno a un punto $x = x_0$ cualquiera de su dominio, para lo cual se eligen los puntos $x_0 + \Delta x$ y $x_0 - \Delta x$, que son los más cercanos a él. Luego, la expansión para estos dos puntos

alrededor de x_0 resulta en

$$\begin{aligned} f(x_0 \pm \Delta x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm \Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \\ &= f(x_0) \pm \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_0) \pm \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Realizando la expansión en serie de Taylor para la función $h(x, t)$ evaluada en el punto $x_0 + \Delta x$ y en torno a x_0 , luego de reordenar y realizar una aproximación de primer orden, se obtiene

$$\frac{\partial h(x_0, t)}{\partial x} = \frac{h(x_0 + \Delta x, t) - h(x_0, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x); \quad (3.2)$$

expresión que recibe el nombre de **diferencia finita posterior**. De la ecuación (3.2) se obtiene la definición de derivada cuando se toma el límite infinitesimal $\Delta x \rightarrow 0$. Sin embargo, acá Δx es un incremento finito. Por lo tanto, conforme disminuye el tamaño de Δx más cercano es al valor real de la derivada.

De forma análoga, se puede obtener una **diferencia finita anterior** realizando una expansión en serie de Taylor para $h(x_0 - \Delta x, t)$, obteniendo

$$\frac{\partial h(x_0, t)}{\partial x} = \frac{h(x_0, t) - h(x_0 - \Delta x, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (3.3)$$

Haciendo un promedio entre las ecuaciones (3.2) y (3.3) se consigue la expresión conocida como **diferencia finita central**:

$$\frac{\partial h(x_0, t)}{\partial x} = \frac{h(x_0 + \Delta x, t) - h(x_0 - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.4)$$

Al promediar se anulan los polinomios de orden igual a un número impar, lo cual implica que en la ecuación (3.4) el primer término a despreciar sea de orden 2.

Existe una variante para calcular una diferencia finita central situando puntos ubicados en medio de los casilleros de la rejilla, para reducir a la mitad la distancia de separación entre los puntos en torno a x_0 . Luego, procediendo de igual forma que anteriormente,

pero utilizando los puntos $x_0 \pm \Delta x/2$ en lugar de $x_0 \pm \Delta x$, se puede escribir

$$\frac{\partial h(x_0, t)}{\partial x} = \frac{h(x_0 + \Delta x/2, t) - h(x_0 - \Delta x/2, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.5)$$

$\mathcal{O}(\Delta x^2) < \mathcal{O}(\Delta x)$ si Δx es un número pequeño. Sin embargo, elegir la mejor forma de estimar el cociente dependerá del comportamiento de la función alrededor del punto x_0 .

3.1.2. Método de Euler

Cuando existe un problema de valor inicial conocido, se puede utilizar el método de Euler para integrar numéricamente la ecuación diferencial asociada a éste. Este método se aplica cuando se quiere integrar una función cuya curva es desconocida, la cual es aproximada mediante una poligonal. Se comienza desde un valor inicial conocido $h(x, t_0)$ para obtener la recta tangente en ese punto, con la cual posteriormente se estima un valor para $h(x, t_0 + \Delta t)$. Y así sucesivamente se computa el valor de la función en las siguientes marcas de la rejilla. La unión de todos estos puntos que se obtienen luego de cada incremento da origen a la poligonal mencionada.

Sea $f(t, h) = \partial h / \partial t$ la función que describe la recta tangente en cada posición de la función h . Se puede estimar la pendiente de esta recta entre el primer par de puntos como

$$\frac{h(x, t_0 + \Delta t) - h(x, t_0)}{\Delta t} \approx f(t_0, h(x, t_0)). \quad (3.6)$$

Reordenando se consigue el valor de la función h evaluada en el instante de tiempo posterior $t_0 + \Delta t$ a partir de valores que son conocidos en el instante t_0 :

$$h(x, t_0 + \Delta t) \approx h(x, t_0) + \Delta t \cdot f(t_0, h(x, t_0)). \quad (3.7)$$

Desarrollando la serie de Taylor para $h(x, t_0 + \Delta t)$ en torno a $h(x, t_0)$ se obtiene un error de truncamiento de primer orden $\mathcal{O}(\Delta t)$.

La ecuación (3.7) recibe el nombre de **método de Euler posterior**, puesto que el punto de tangencia se encuentra adelantado respecto a la recta estimada. Cuando este

punto se ubica por detrás se denomina método de Euler anterior, que se calcula como

$$h(x, t_0 + \Delta t) \approx h(x, t_0) + \Delta t \cdot f(t_0 + \Delta t, h(x, t_0 + \Delta t)). \quad (3.8)$$

Sin embargo, esta es una ecuación implícita y resolverla requiere de cálculos más complejos. Por contraparte, se posee una ventaja descrita en la sección siguiente.

Por esta razón los métodos posterior y anterior de Euler reciben el nombre de métodos explícito e implícito de Euler, respectivamente.

Ambos métodos se pueden usar utilizando un medio incremento en lugar de un incremento entero por cada paso temporal.

3.2. Discretización del modelo

Si bien la ecuación (2.45) se puede resolver analíticamente, resulta mucho más sencillo resolverla utilizando los métodos numéricos expuestos anteriormente. En primer lugar, se debe definir cuidadosamente el dominio espacial, de modo que sea lo suficientemente amplio para que el glaciar pueda alargarse y que a la vez no exceda demasiado su extensión máxima, evitando de esta forma un aumento innecesario de cálculo computacional. También se debe definir el tiempo total que transcurrirá durante la simulación.

Una vez especificado el tamaño de los incrementos Δx y Δt , se construye una rejilla que abarque los dominios determinados anteriormente, cuyas dimensiones será de $(m + 1) \times (l + 1)$ puntos discretos. Sin embargo, como se verá más adelante, la rejilla no será homogénea y la medida de los incrementos definidos anteriormente en realidad corresponden únicamente a los tamaños iniciales correspondientes $(\Delta x)_0$ y $(\Delta t)_0$.

Utilizando notación con subíndice y superíndice, se tiene la aproximación $h_i^k \approx h(x, t)$; donde $i = 0, 1, \dots, m$ y $k = 0, 1, \dots, l$ representan cada uno de los puntos de la rejilla en la dirección x y t , respectivamente.

Se debe advertir que la ecuación (2.45) no es válida en el frente del glaciar, puesto que la difusividad se anula en este punto y esto implica que el glaciar no pueda alargarse. En la realidad existe un flujo de masa desde su frente hacia el espacio que permanece libre de hielo, permitiendo que el glaciar pueda crecer a través de su zona de ablación. Por lo tanto, es necesario un tratamiento teórico diferente para este punto (Nye, 1967).

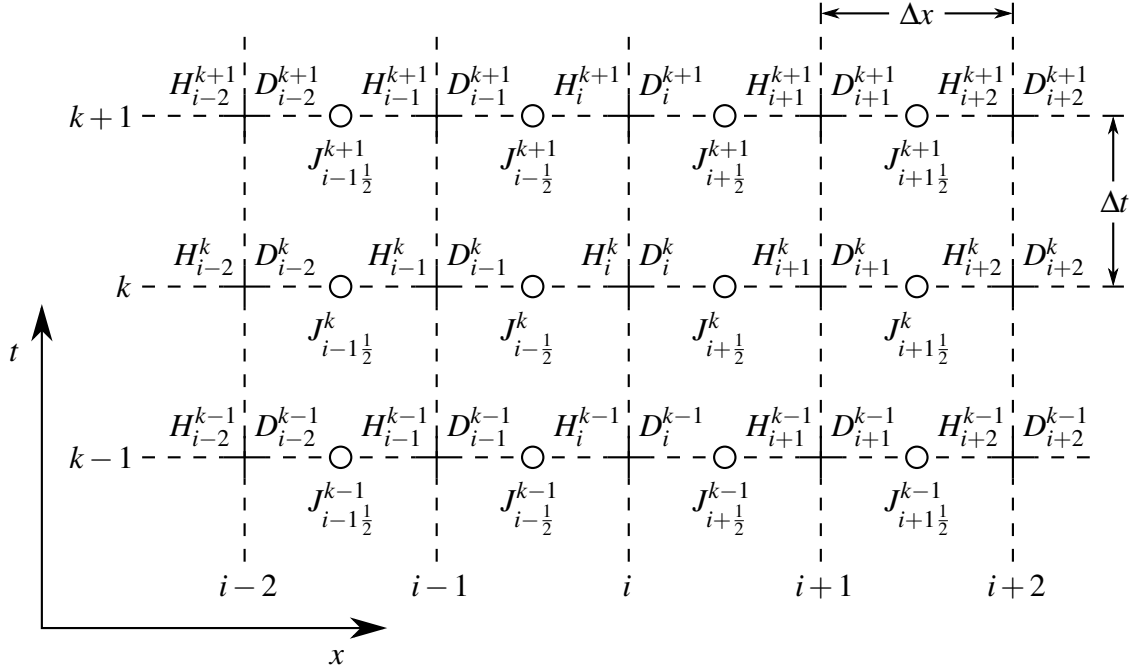


Figura 3.1. Confección de la rejilla en torno al punto (i, k) , utilizando la evaluación del tipo II. Los círculos corresponden a puntos intermedios de la rejilla en la dirección x . En la evaluación del tipo I se estima la difusividad en esos puestos en lugar de los puntos discretos.

Luego, para cada instante de tiempo k , sea i_{edge} el último punto hacia el lado derecho de la rejilla donde $H > 0$ (Oerlemans, 2001), se debe establecer que

$$-\left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_{i_{\text{edge}}+1} > 0. \quad (3.9)$$

Sin embargo, esto es algo que se consigue ineludiblemente a partir del error de truncamiento asociado al método de diferencias finitas (Oerlemans, 2001). Por lo tanto, se asegura la existencia de un flujo de hielo desde el punto i_{edge} hacia la posición $i_{\text{edge}} + 1$. Si la magnitud de la tasa de cambio de este flujo excede al balance de masa negativo en el punto $i_{\text{edge}} + 1$, éste se llenará con hielo.

El flujo de hielo se calcula en puntos intermedios de la rejilla como

$$J_{i+1/2}^k \approx -D_{i+1/2}^k \left(\frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} \right) \quad (3.10)$$

o bien como

$$J_{i+1/2}^k \approx - \left(\frac{D_i^k + D_{i+1}^k}{2} \right) \left(\frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} \right). \quad (3.11)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) corresponden, respectivamente, a las formas tipo I y II de los experimentos de EISMINT (Huybrechts y col., 1996). La diferencia radica en la forma que se evalúa la difusividad. Para el tipo II ésta se calcula en puntos regulares de la rejilla como

$$D_i^k \approx \left([w_b]_i + \frac{1}{2} \lambda_i H_i^k \right) \left(f_i \rho g H_i^k \right)^n \left[f_d (H_i^k)^2 + f_s \right] \left| \frac{h_{i+1}^k - h_{i-1}^k}{2 \Delta x} \right|^{n-1}, \quad (3.12)$$

mientras que en el tipo I se estima en puntos intermedios:

$$D_{i+1/2}^k \approx \left[[w_b]_{i+1/2} + \frac{1}{2} \lambda_{i+1/2} \left(\frac{H_i^k + H_{i+1}^k}{2} \right) \right] \left[f_{i+1/2} \rho g \left(\frac{H_i^k + H_{i+1}^k}{2} \right) \right]^n \times \left[f_d \left(\frac{H_i^k + H_{i+1}^k}{2} \right)^2 + f_s \right] \left| \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} \right|^{n-1}. \quad (3.13)$$

Para la integración en el tiempo del espesor del glaciar se utiliza el método de Euler posterior, y diferencias finitas central de medio incremento para el gradiente del flujo de hielo (Oerlemans, 2001; Van den Berg y col., 2006). Luego, se obtiene la aproximación

$$\frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\Delta t} \approx \frac{-1}{[w_b]_i + \lambda_i H_i^k} \frac{J_{i+1/2}^k - J_{i-1/2}^k}{\Delta x} + b_i^k. \quad (3.14)$$

Reordenando, se consigue el valor del espesor del hielo para el instante de tiempo sucesivo $k + 1$:

$$H_i^{k+1} \approx H_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{J_{i-1/2}^k - J_{i+1/2}^k}{[w_b]_i + \lambda_i H_i^k} + b_i^k \Delta x \right\}. \quad (3.15)$$

3.2.1. Condiciones de borde

Como puede verse en la ecuación (3.15), la derivación del flujo difusivo y la integración del espesor de hielo en el tiempo no puede realizarse en los puntos extremos del dominio espacial. Por lo tanto, estamos ante un problema de condición de frontera.

El lado izquierdo de la rejilla corresponde a la línea divisoria del glaciar, es decir, donde éste nace y comienza a fluir pendiente abajo. Esto supone que aquí no existe afluencia de hielo, cuestión que se consigue estableciendo una pendiente nula para el punto inicial (Oerlemans, 2001; Van den Berg y col., 2006):

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} \approx \frac{h_1 - h_0}{\Delta x} = 0. \quad (3.16)$$

En el borde derecho de la rejilla se asigna un espesor nulo (Van den Berg y col., 2006), lo cual implica que se detiene progresivamente el crecimiento del glaciar cuando su frente alcanza este lado.

La integración de la ecuación (2.45) conlleva a que el espesor del hielo adquiera valores negativos a la derecha del frente del glaciar, ya que el balance de masa negativo excede al gradiente de flujo de hielo en esta zona, e incluso es posible que ocurra esto en lugares a la izquierda del punto i_{edge} para delineaciones del terreno complejas. Por lo tanto, se realiza la asignación $H := 0$ en todos aquellos puntos de la rejilla donde $H < 0$ (Van den Berg y col., 2006).

3.3. Medida del paso temporal

Como se dijo anteriormente, el método de Euler posterior es más sencillo de implementar, pero requiere el uso de pasos temporales mucho más pequeños en comparación al método de Euler anterior, para asegurar la convergencia de la solución obtenida, la cual debe satisfacer la condición de Courant–Friedrichs–Lewy.

El nuevo valor h_i^{k+1} se obtiene como un promedio de los antiguos valores. Luego, sustituyendo las expresiones del flujo de hielo del tipo I o tipo II en la ecuación (3.15),

se obtiene una expresión de la forma

$$h_i^{k+1} = \mu_1 h_{i-1}^k + (1 - 2\mu_2) h_i^k + \mu_3 h_{i+1}^k, \quad (3.17)$$

donde se han agrupado el resto de los términos en los parámetros μ_1 , μ_2 y μ_3 . Sin embargo, la ecuación anterior sólo es un promedio si el coeficiente central es un valor positivo (Morton y Mayers, 2005), cuestión que se consigue con la limitación

$$1 - 2\mu_2 \geq 0. \quad (3.18)$$

Posteriormente, evaluando los términos originales agrupados por μ_2 y reordenando, se consigue la siguiente restricción sobre el tamaño del incremento de tiempo para la forma del tipo I:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} C_I (\Delta x)^2 \min \left\{ \left[\frac{1}{[w_b]_i + \lambda_i H_i^k} \frac{D_{i-1/2}^k + D_{i+1/2}^k}{2} \right]^{-1} \right\}. \quad (3.19)$$

Donde se ha elegido el valor más pequeño que se logra al operar sobre cada punto de la rejilla en la dirección espacial. Además, se ha agregado un factor C_I que se define como número de Courant, una fracción propia que sirve para asegurar la convergencia de la solución.

De forma análoga, se obtiene la restricción para la forma del tipo II:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} C_{II} (\Delta x)^2 \min \left\{ \left[\frac{1}{[w_b]_i + \lambda_i H_i^k} \frac{D_{i-1}^k + 2D_i^k + D_{i+1}^k}{4} \right]^{-1} \right\}, \quad (3.20)$$

donde C_{II} es su respectivo número de Courant.

Se escoge un número de Courant tal que el tamaño del paso temporal sea lo bastante pequeño para que la solución converja, y a la vez lo suficientemente grande para no disminuir más de lo necesario la velocidad de cómputo. Por ende, el valor de Δt puede variar convenientemente en cada salto temporal para satisfacer las necesidades anteriores.

Además, la medida del paso temporal no puede exceder un valor arbitrario razonablemente pequeño, simbolizado como $(\Delta t)_{\max}$, para evitar que $\Delta t \rightarrow \infty$ cuando el glaciar

tiende a desvanecerse.

Las soluciones del tipo I es numéricamente más precisa, pero requiere del uso de incrementos de tiempo mucho más pequeños en relación a las del tipo II (Hindmarsh y Payne, 1996; Huybrechts y col., 1996).

3.4. Calving

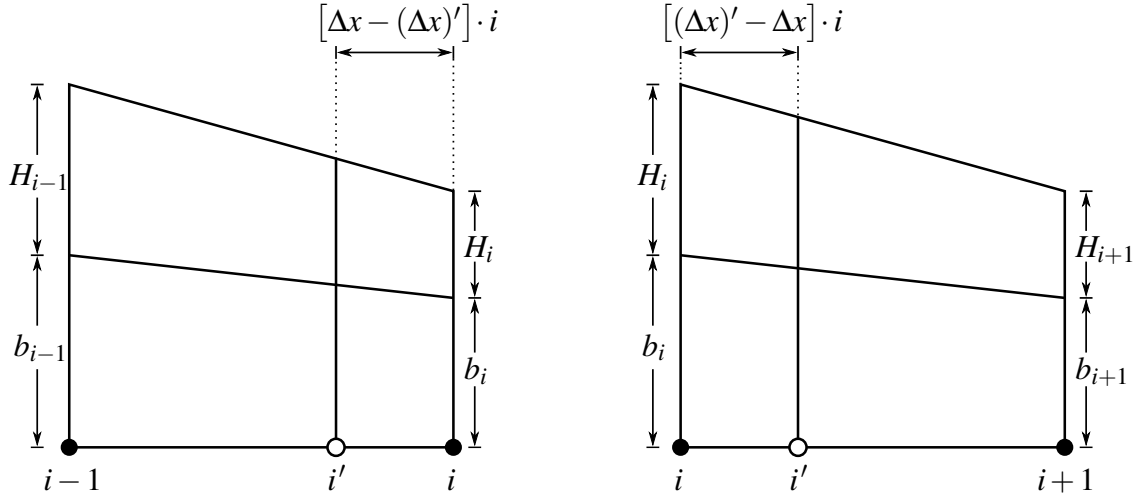
El desprendimiento de témpanos es una forma de ablación que ocurre en el frente del glaciar cuando éste se encuentra parcialmente sumergido en agua, fenómeno que se manifiesta en una reducción de la longitud total del glaciar.

Los modelos aquí expuestos cuantifican la longitud del desprendimiento de hielo como una medida proporcional a la profundidad del cuerpo de agua exactamente en el frente del glaciar. Sin embargo, las medidas en la dirección x del sistema de referencia se encuentran discretizadas y limitadas a los puntos de la rejilla. Luego, para poder estimar la ubicación exacta del nuevo frente del glaciar, producto del desprendimiento, se deben reajustar los puntos espaciales de la cuadrícula de modo que uno de ellos coincida con esta posición (Nick y Oerlemans, 2006).

Una vez determinada la nueva ubicación del frente del glaciar, se debe elegir la cantidad de puntos espaciales de la rejilla que habrán entre los extremos de la masa de hielo. Este número se elige de modo que el valor de Δx varíe lo menos posible en relación al que poseía en el instante de tiempo anterior, para optimizar posteriores cálculos.

Sin embargo, también se desea que el nuevo espaciado en la dirección espacial de la cuadrícula no varíe demasiado en relación a la separación inicial. Por lo tanto, se le asigna un intervalo: $(\Delta x)_k \in [(\Delta x)_{\text{mín}}, (\Delta x)_{\text{máx}}]$. Los valores extremos que, eventualmente, alcanzaría Δx se pueden estimar como $(\Delta x)_0 \pm \delta x$, siendo δx la variación máxima de la separación en relación a su medida inicial. Para satisfacer este último requisito se agregará o se quitará un sólo punto cualquiera de la rejilla a la izquierda del frente del glaciar, y se reajustará la posición de todos los puntos, a excepción de los que representen el nacimiento y el frente del glaciar, para que vuelvan a estar equiespaciados.

Posteriormente, se estima el valor del espesor del hielo en la rejilla con el nuevo espaciado mediante una interpolación lineal entre los dos puntos más cercanos antes del



(a) Interpolación lineal entre los puntos $i-1$ e i de la rejilla cuando $(\Delta x)' < \Delta x$.

(b) Interpolación lineal entre los puntos i e $i+1$ de la rejilla cuando $(\Delta x)' > \Delta x$.

Figura 3.2. Perfil lateral del glaciar entre dos puntos contiguos de la rejilla. Los valores en el punto i' se estiman mediante una interpolación lineal entre los dos puntos más cercanos de la antigua rejilla.

reajuste (Nick y Oerlemans, 2006), como lo indica la figura 3.2. Con la imposición de las condiciones de borde previamente mencionadas se asegura que entre dos puntos de la antigua separación sólo habrá un punto espacial de la rejilla reajustada o viceversa hasta el borde del glaciar. Luego, se puede obtener el valor del espesor del hielo, para un tiempo t_k y en los puntos reajustados i' , a partir de la geometría representada por las figuras 3.2a y 3.2b:

$$H_{i'} \approx \begin{cases} H_i + \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x} [(\Delta x)' - \Delta x] \cdot i & \text{si } (\Delta x)' < \Delta x, \\ H_i + \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x} [(\Delta x)' - \Delta x] \cdot i & \text{si } (\Delta x)' > \Delta x. \end{cases} \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es válida para $i^{(t)} = 1, \dots, i'_{\text{edge}}$; siendo i'_{edge} la posición que ocupa el frente del glaciar posterior al desprendimiento de hielo. Δx y $(\Delta x)'$ denotan el espaciado de la rejilla antes y después de este desprendimiento, respectivamente; de modo provisorio, puesto que $(\Delta x)_k := (\Delta x)'$ al final del instante de tiempo t_k .

El reajuste de la rejilla implica que pueda ser necesario agregar o quitar puntos en

el lado derecho para abarcar lo máximo posible el dominio espacial definido para el instante inicial t_0 . Luego, el puesto que ocupa el último punto espacial de la rejilla, en un instante de tiempo t_k , es

$$m_k = m_0 \left[\frac{(\Delta x)_0}{(\Delta x)_k} \right]. \quad (3.22)$$

3.4.1. Modelo de aguas profundas

El modelo de aguas profundas es el más sencillo de implementar, ya que el *calving* ocurre de forma continua en el tiempo mientras el frente del glaciar se encuentre sumergido en el agua. Brown y col. (1982) propusieron una relación simple en que la velocidad horizontal de desprendimiento de hielo U_c es una función proporcional a la profundidad del agua d en el frente del glaciar:

$$U_c = -\zeta d, \quad (3.23)$$

donde ζ denota el coeficiente de proporción en unidades de a^{-1} .

Una vez realizada la discretización, se puede obtener la variación en su largo $\Delta\ell$ que sufre el glaciar producto del desprendimiento de témpanos, dado por

$$(\Delta\ell)_k = \zeta (h_w - b_{i_{\text{edge}}}) (\Delta t)_k, \quad (3.24)$$

donde h_w es la altitud desde el nivel de referencia a la que se encuentra la superficie del cuerpo de agua que inunda el frente del glaciar. Luego, se puede estimar la nueva posición del frente en relación a la antigua por

$$i'_{\text{edge}} = i_{\text{edge}} - \left[\frac{(\Delta\ell)_k}{(\Delta x)_k} \right]. \quad (3.25)$$

3.4.2. Modelo de flotabilidad modificado

Van der Veen (1996) presentó un modelo de *calving* basado en una altura, medida desde el lecho glaciar o fondo del agua, por sobre la línea de flotabilidad del hielo denominada **espesor crítico**. Si el espesor del hielo en el frente del glaciar es menor a

este espesor crítico, denotado como H_c , ocurre un desprendimiento. Entonces

$$H_c = \frac{\rho_w}{\rho}d + H_0, \quad (3.26)$$

donde d es la profundidad del cuerpo de agua, ρ_w es su densidad y H_0 es una constante que determina la altura mínima por encima de la línea de flotabilidad para que no ocurra un desprendimiento. A éste se le conoce como modelo de flotabilidad.

Vieli y col. (2001) propusieron un criterio de flotabilidad modificado, en el cual el valor H_0 varía en función de la profundidad del agua en el frente del glaciar mediante una fracción pequeña q del espesor de flotación del hielo. Luego el espesor crítico se reescribe como

$$H_c = \frac{\rho_w}{\rho}(1 + q)d. \quad (3.27)$$

El parámetro q es un número menor para glaciares que son más delgados o que tienen menos grietas (Nick y Oerlemans, 2006). Un valor de $q = 0$ implica que ocurre un desprendimiento sólo cuando el frente del glaciar comienza a flotar en el agua.

El retroceso del glaciar ocurrirá hasta un punto donde el espesor del hielo iguale al valor del espesor crítico.

Este modelo, a diferencia del de aguas profundas, es más condicional y complejo de implementar. Pero entrega una geometría más realista para el frente del glaciar cuando ocurre un desprendimiento, pues éstos terminan en una pared de hielo sobre el agua.

Por lo tanto, ocurre un desprendimiento si se satisface la condición $H_{i_{\text{edge}}} < [H_c]_{i_{\text{edge}}}$. Se verifica este requisito en los puntos contiguos hacia la izquierda, desplazando de manera provisional la posición del frente glaciar, deteniéndose en la última ubicación donde se cumpla la condición mencionada. Hasta aquí el tamaño del desprendimiento alcanza la cantidad de puntos de rejilla que ha sido desplazado el frente glaciar. Sin embargo, se le debe añadir una fracción de celda, pues el nuevo frente definitivo se ubicará en un lugar ubicado entre dos puntos discretos. Para determinar el tamaño de esta fracción, denotada por $\Delta\ell$, se realiza una interpolación lineal entre el punto de la rejilla donde está ubicado provisionalmente el frente del glaciar y el que le antecede. Conociendo el valor de $\Delta\ell$ se puede obtener la ubicación espacial del nuevo frente

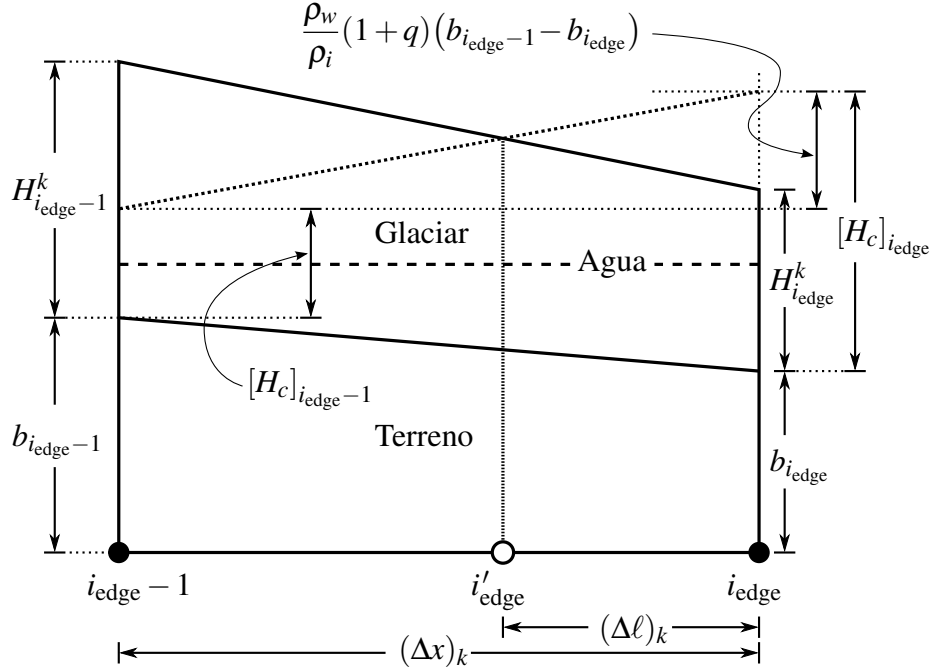


Figura 3.3. Estimación de la nueva posición del frente glaciar i'_{edge} al utilizar el modelo de flotabilidad modificado, luego de ocurrido un desprendimiento. El frente actualizado se calcula mediante una interpolación lineal del espesor del glaciar y el espesor crítico entre los dos puntos más cercanos de la antigua rejilla, que son i_{edge-1} e i_{edge} . La abscisa del punto de intersección entre estas dos rectas estimadas corresponde a la posición del nuevo frente.

mediante una relación trigonométrica (ver figura 3.3). Luego,

$$(\Delta \ell)_k \approx \frac{H_{i_{edge}}^k + \frac{\rho_w}{\rho_i}(1+q)(b_{i_{edge}} - h_w)}{(H_{i_{edge}}^k - H_{i_{edge-1}}^k) + \frac{\rho_w}{\rho_i}(1+q)(b_{i_{edge}} - b_{i_{edge-1}})} (\Delta x)_k. \quad (3.28)$$

Posteriormente, se estima el nuevo valor para Δx de modo que la posición del frente del glaciar le corresponda la ubicación del punto más cercano del antiguo espaciamiento.

Capítulo 4

Resultados

Se realizan una serie de experimentos para constatar el funcionamiento de los métodos numéricos expuestos e identificar los errores propios del procedimiento. En primer lugar se considera el caso más simple posible.

4.1. Glaciar de lecho lineal y ancho constante

Se llevan a cabo simulaciones para un glaciar de ancho constante y sección transversal rectangular, que se mueve sin deslizamiento sobre una pendiente lisa que descrita por la función

$$b(x) = b_0 + sx, \quad (4.1)$$

donde b_0 es la elevación del lecho glaciar en el lado izquierdo de la rejilla, s es la pendiente y x es la distancia medida desde su origen (p.ej. Van den Berg y col., 2006; Nick y Oerlemans, 2006).

Van den Berg y col. (2006) han descrito el balance de masa como una función lineal, cuya única variable independiente es la elevación h por sobre el nivel de referencia, de la forma

$$\dot{b}(h) = \text{mín} \{ \dot{b}_{\text{máx}}, \beta(h - E) \}, \quad (4.2)$$

donde E denota la altitud de la línea de equilibrio y β es un coeficiente de proporción que determina la tasa de variación del balance de masa con la altura. El balance de masa

Cuadro 4.1. Parámetros utilizados en la simulación de un glaciar con lecho lineal y ancho constante, para $n = 3$.

A ($10^{-24} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$)	f_s ($\text{m}^2 \text{ a}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$)	E (m)	β (10^{-2} a^{-1})	$B_{\text{máx}}$ (m a^{-1})	b_0 (m)	s	$f(x)$	$\lambda(x)$
2,4	0	1450	1,18	13,924	3500	-12^{-1}	1	0

es cero a una altitud E y aumenta linealmente con la altura hasta alcanzar un límite máximo $B_{\text{máx}}$. Una vez alcanzado este extremo, el balance de masa permanece constante a medida que aumenta la elevación.

Para los parámetros de flujo se utilizan los valores $n = 3$ y $A = 2,4 \times 10^{-24} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$. Este último es el valor recomendado para una temperatura de 0°C (Cuffey y Paterson, 2010), que es la que le corresponde a glaciares templados como los de la Patagonia.

Los valores utilizados para el resto de los parámetros se listan en el Cuadro 4.1. Por simplicidad, se utiliza un valor igual a 1 para el factor de forma. Sin embargo, para cálculos más realistas en un glaciar de valle, se debe establecer que $f(x) \in (0, 1)$, puesto que $f \rightarrow 1$ cuando $w_b \gg H$ (Cuffey y Paterson, 2010).

Todas las simulaciones son con un estado inicial sin hielo y acaban cuando el glaciar que se ha formado alcanza un estado de equilibrio.

4.1.1. Simulaciones sin calving

Experimento 1.1: Diferencias en las formas

El primer experimento consiste en analizar las diferencias existentes en calcular la difusividad de las formas tipo I y II, utilizando un ancho de rejilla $\Delta x = 200 \text{ m}$ y los parámetros restantes del cuadro 4.1.

El resultado obtenido (figura 4.2) es similar para ambos tipos. El glaciar alcanza el mismo largo y por ende igual superficie. Sólo existe una diferencia en la geometría de su frente, cuya pendiente es mayor para la forma del tipo I.

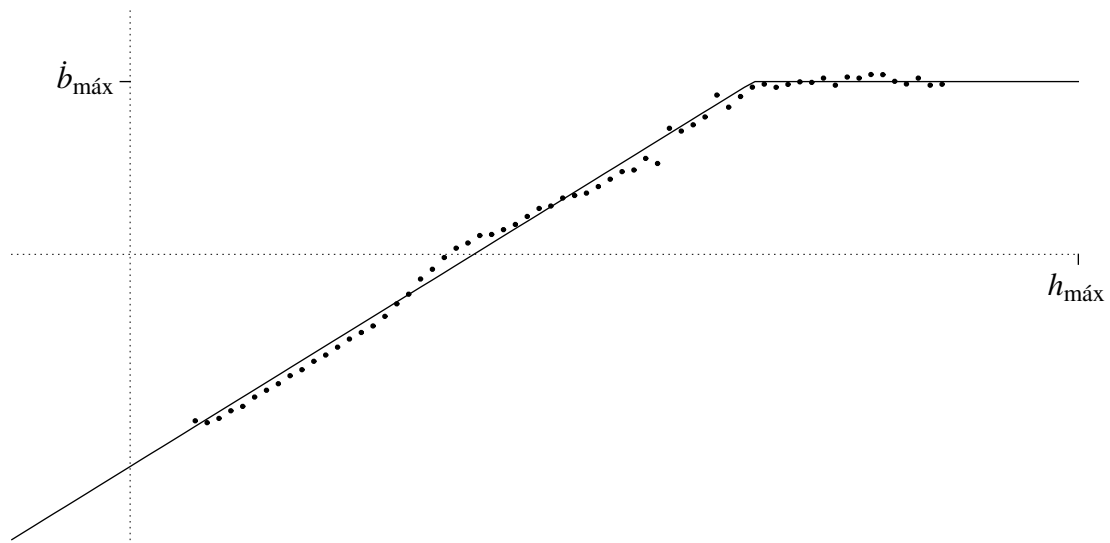


Figura 4.1. Ajuste lineal del balance de masa al utilizar la ecuación (4.2). Los puntos son los datos medidos para el Glaciar O'Higgins y la recta corresponde a la interpolación. Las líneas punteadas están emplazadas donde la elevación y el balance de masa son nulos, para los cuales se han señalado sus valores máximos $h_{\text{máx}}$ y $\dot{b}_{\text{máx}}$, respectivamente.

Experimento 1.2: Variación en el ancho de la rejilla

En el segundo experimento se examina las discrepancias que aparecen al modificar el ancho de la rejilla, cuyo resultado se expone en la figura 4.3 para tres cantidades diferentes.

Con los valores $\Delta x = 100$ m y $\Delta x = 200$ m las curvas que describen el perfil del glaciar son casi coincidentes y la posición del frente es la misma. El resultado obtenido para $\Delta x = 400$ m difiere en mayor medida y el glaciar alcanza una menor longitud. Sin embargo, esta merma en su largo es menor al ancho de rejilla utilizado, por lo cual se encuentra dentro del error de truncamiento.

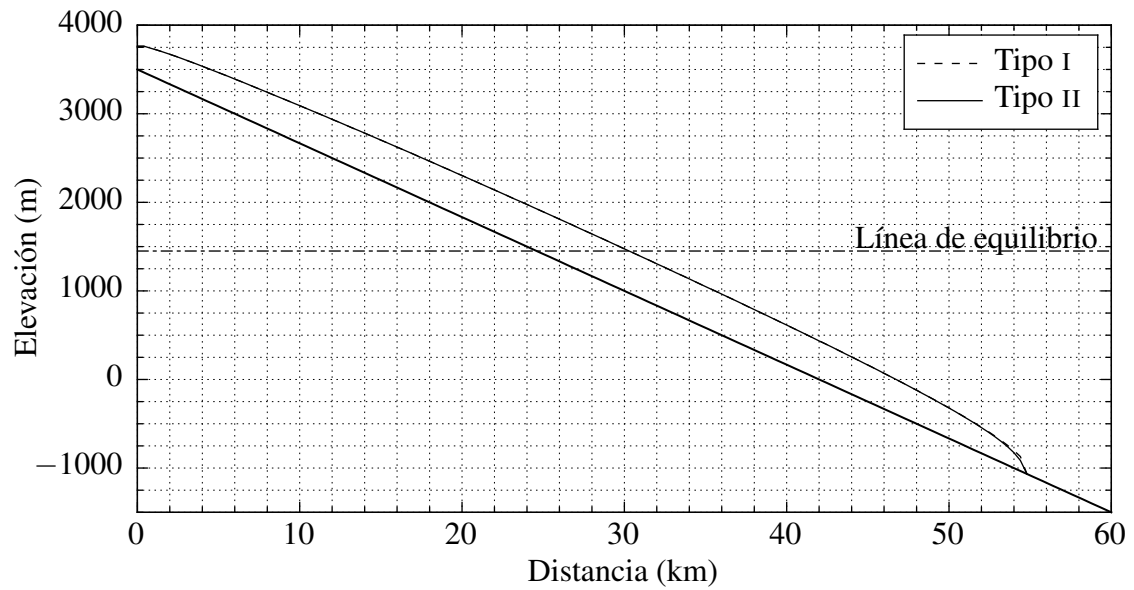


Figura 4.2. Glaciar de lecho lineal y ancho constante en equilibrio, resuelto usando las formas del tipo I y II.

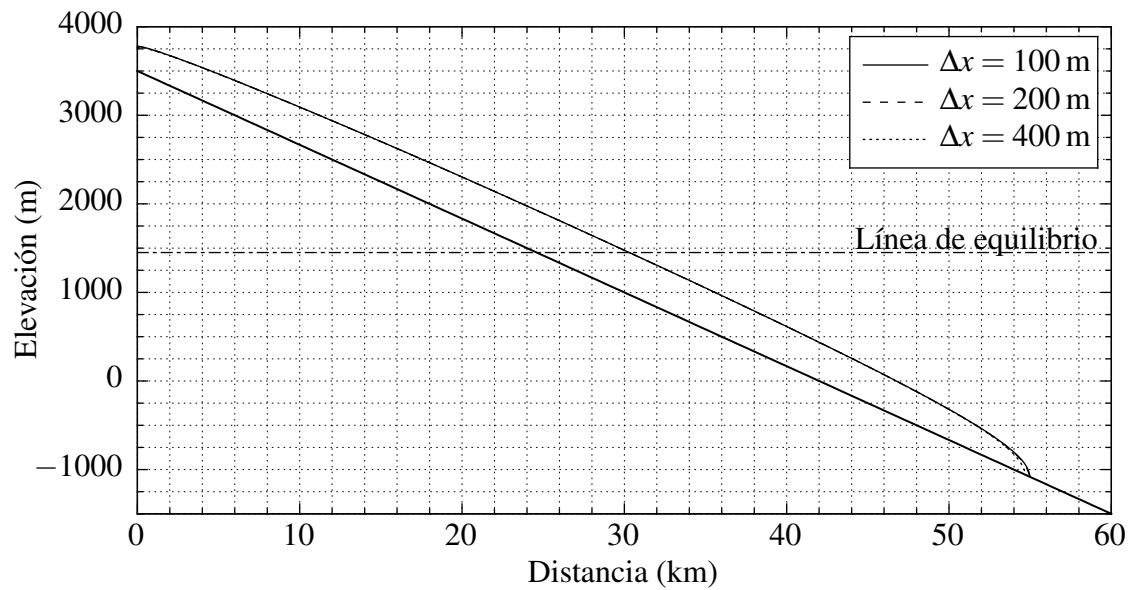


Figura 4.3. Glaciar de lecho lineal y ancho constante en equilibrio para diferentes valores de Δx , utilizando la forma de la solución tipo II.

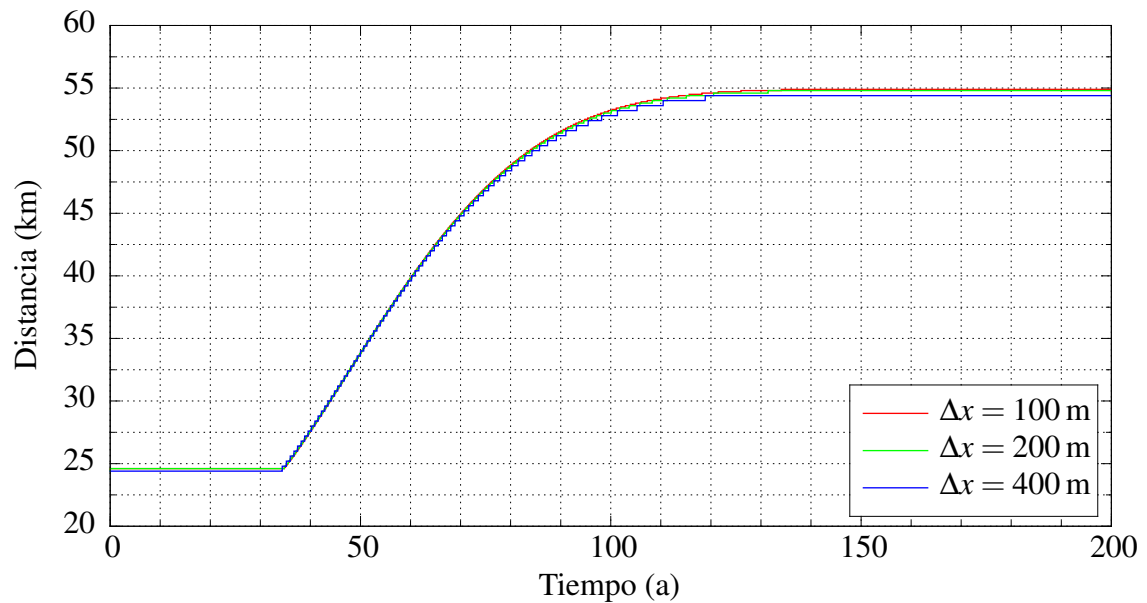


Figura 4.4. Evolución en el tiempo del largo del glaciar de lecho lineal sin calving para diferentes valores de Δx .

4.1.2. Simulaciones con desprendimientos: modelo de flotabilidad modificado

Más tarde se realizan simulaciones con el mismo glaciar de lecho lineal expuesto anteriormente (utilizando los parámetros del cuadro 4.1), pero agregando un cuerpo de agua situado a una altitud de 250 m. Elevación que se encuentra por encima de la altura sobre el nivel de referencia a la que se sitúa el frente del glaciar sin calving en equilibrio. Se utiliza el modelo de flotabilidad modificado para reproducir los desprendimientos, ante lo cual se ha fijado $q = 0,15$ para la fracción del espesor de flotación, que es el valor sugerido por Vieli y col. (2001) para el Glaciar Columbia. Luego, comenzando con un estado libre de hielo, se espera que este método de ablación frontal frene progresivamente el avance del glaciar formado, consiguiendo una longitud menor.

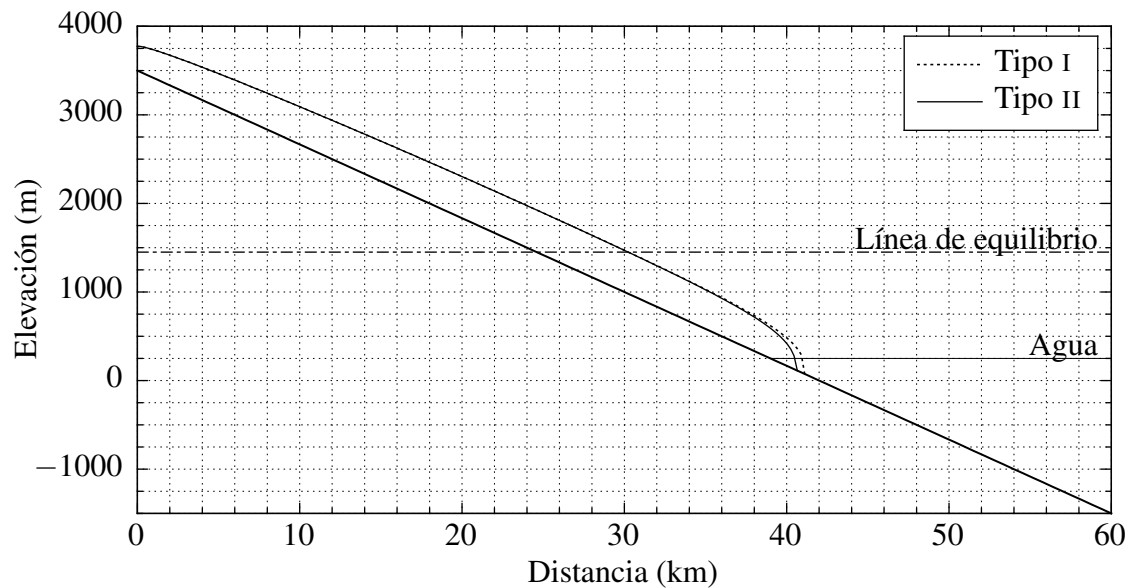


Figura 4.5. Modelo de flotabilidad modificado para un glaciar en equilibrio, de ancho constante y pendiente lisa, estimando la difusividad de las formas tipo I y II. La línea de equilibrio se sitúa a 1450 m y la superficie del agua a 250 m de altitud. El ancho inicial de la rejilla es de $\Delta x = 200$ m, con $\delta x = 5$ m de desviación máxima al reajustar el ancho de ésta tras un desprendimiento.

Experimento 2.1: Diferencias en las formas

Como primer experimento se examina las diferencias existentes al resolver las ecuaciones de las dos formas, tipo I y II. El resultado expuesto en la figura 4.5 muestra una diferencia considerable en la posición del frente del glaciar entre ambos tipos, siendo menor la longitud alcanzada por el glaciar del tipo II. Se ha utilizado un ancho inicial $\Delta x = 200$ m en el espaciado de la rejilla, el cual irá variando con cada desprendimiento. Sin embargo, la variación máxima no excederá la desviación $\delta x = 5$ m asignada respecto del valor en el instante inicial.

Experimento 2.2: Corrección de la pendiente

Con el modelo de flotabilidad modificado se produce una discontinuidad importante en el borde del glaciar tras un desprendimiento. Por lo tanto, se decide calcular la pendiente de la superficie usada para la estimación de la difusividad de un modo alternativo,

para este punto en particular.

Se comprueba el resultado utilizando una diferencia finita anterior. De este modo se evita tomar valores de algún punto situado más allá del margen del glaciar. Condición que se emplea únicamente para la forma del tipo II, puesto que en la forma del tipo I la pendiente de la superficie se calcula en puntos intermedios de la rejilla y, por ende, no se evalúa ningún punto ubicado fuera del glaciar cuando se calcula la pendiente sobre la superficie de éste. Así, en principio, esta forma se considera correcta y se toma como referencia para las correcciones. Luego, la pendiente de la superficie para la ecuación (2.43) en el frente se aproxima como

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i_{\text{edge}}} \approx \frac{h_{i_{\text{edge}}} - h_{i_{\text{edge}}-1}}{\Delta x}. \quad (4.3)$$

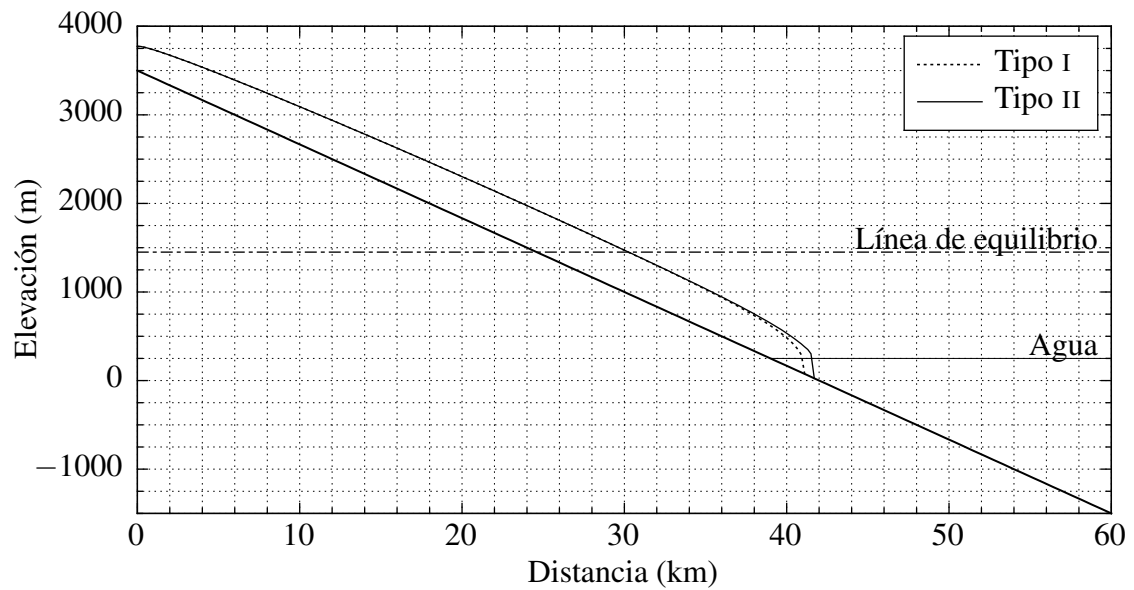
El resultado visualizado en la figura 4.6a advierte que esta condición de borde sobrestima el flujo de hielo en el margen del glaciar, ocasionando que esta vez el frente se sitúe por delante del calculado por la forma del tipo I y se aleje aún más de este valor de referencia.

Ante el resultado anterior, se prueba con otra aproximación obtenida a partir de un desarrollo en serie de Taylor en torno a la pendiente de la superficie en un punto i , corrección empleada por Van den Berg y col. (2006). Despreciando los términos igual o superior a $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, se obtiene

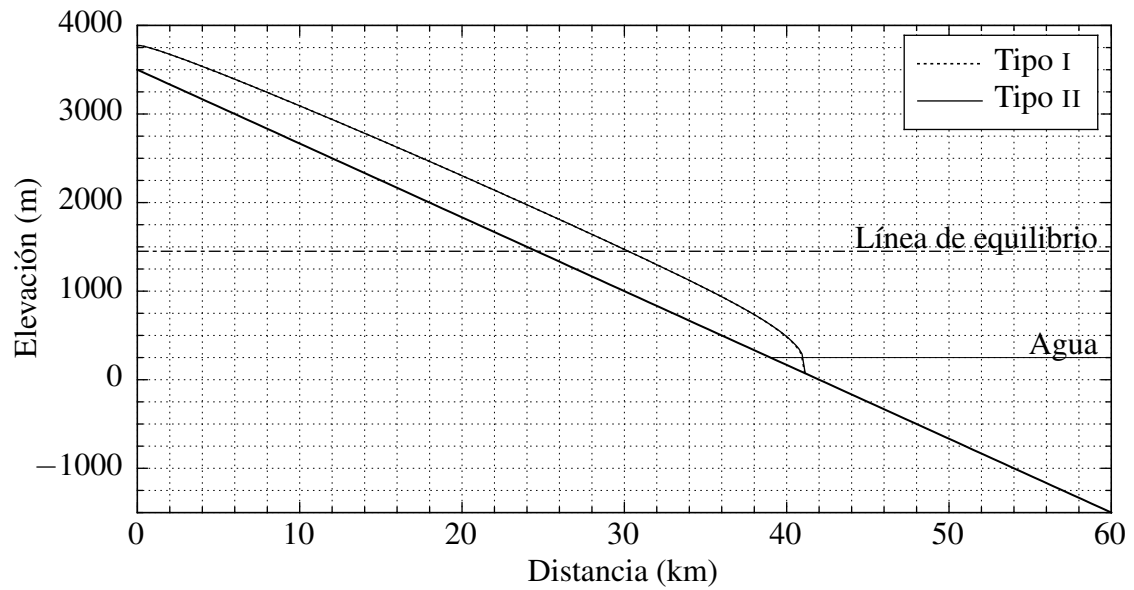
$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_i \approx \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i-1} + \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|_{i-1} \Delta x. \quad (4.4)$$

En la forma del tipo II las pendiente de la superficie en la difusividad se estima utilizando el método de diferencias central con incremento completo. Luego, calculando de igual forma todas las derivadas de la ecuación (4.4) en el frente glaciar, se obtiene la condición de borde

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i_{\text{edge}}} \approx \underbrace{\frac{h_{i_{\text{edge}}+1} - h_{i_{\text{edge}}-1}}{2 \Delta x}}_{\text{aproximación básica}} \approx \underbrace{\frac{3h_{i_{\text{edge}}} - 4h_{i_{\text{edge}}-1} + h_{i_{\text{edge}}-2}}{2 \Delta x}}_{\text{nueva aproximación}}. \quad (4.5)$$



(a) Para la forma tipo II, se ha calculado la pendiente en el borde del glaciar usando diferencias finitas anterior.



(b) Para la forma tipo II, se ha calculado la pendiente en el borde del glaciar usando una aproximación de serie de Taylor.

Figura 4.6. Modelo de flotabilidad modificado para un glaciar en equilibrio, de ancho constante y pendiente lisa, estimando la difusividad de las formas tipo I y II. La línea de equilibrio se sitúa a 1450 m y la superficie del agua a 250 m de altitud. $\Delta x \approx 200$ m.

Con la nueva aproximación, al igual que en la anterior condición de borde, se evita trabajar con valores ubicados fuera del glaciar al computar sobre su borde.

En la figura 4.6b se puede ver que con esta elección el glaciar alcanza el mismo largo que al utilizar la forma del tipo I. Luego, en los cálculos futuros se aplica esta corrección al modelo de aguas profundas.

Experimento 2.3: Variación en el ancho de la rejilla

El siguiente ensayo es estudiar las discrepancias existentes al variar el ancho de la rejilla, para lo cual se utiliza la solución de la forma tipo II con la corrección proporcionada por la ecuación (4.4) y para tres diferentes valores de Δx .

La figura 4.7 muestra que existen diferencias considerables en la posición del frente glaciar al modificar la magnitud de Δx . Mientras más pequeño sea, más grande es el tamaño del desprendimiento, resultando en una menor extensión del glaciar.

4.1.3. Simulaciones con desprendimientos: modelo de aguas profundas

Para los experimentos con el modelo de aguas profundas se utilizan los parámetros del cuadro 4.1, un cuerpo de agua situado a 250 m del nivel de referencia y para la estimación de la velocidad de desprendimiento un coeficiente de proporción $\zeta = 10 \text{ a}^{-1}$, que es el valor utilizado por Nick y col. (2007a) y estimado por Van der Veen para el Glaciar Columbia.

Experimento 3.1: Diferencias en las formas

Se examina las discrepancias existentes al utilizar una u otra forma de los tipos I o II para resolver las ecuaciones. En la figura 4.9a se visualiza una mayor ablación para la forma del tipo I. En la figura 4.9b disminuye la diferencia existente en la longitud del glaciar entre ambos tipos al agregar la corrección de la pendiente en su frente para la forma del tipo II. Sin embargo, con esta forma el margen sigue estando considerablemente adelantado respecto del tipo I.

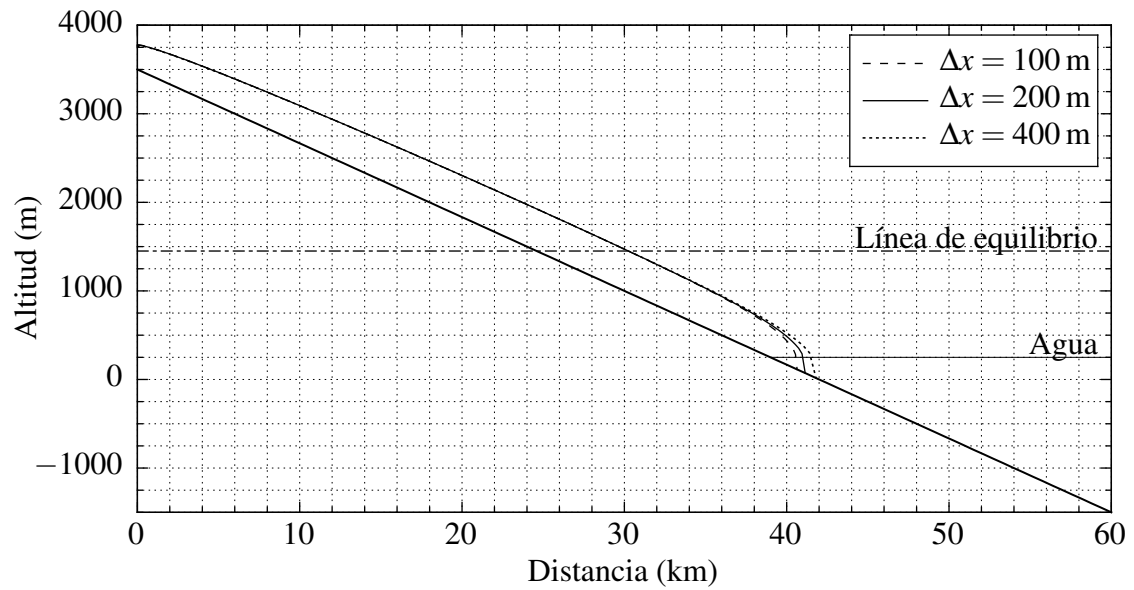


Figura 4.7. Modelo de flotabilidad modificado para la forma del tipo II utilizando diferentes valores de Δx , aplicado al glaciar de lecho lineal.

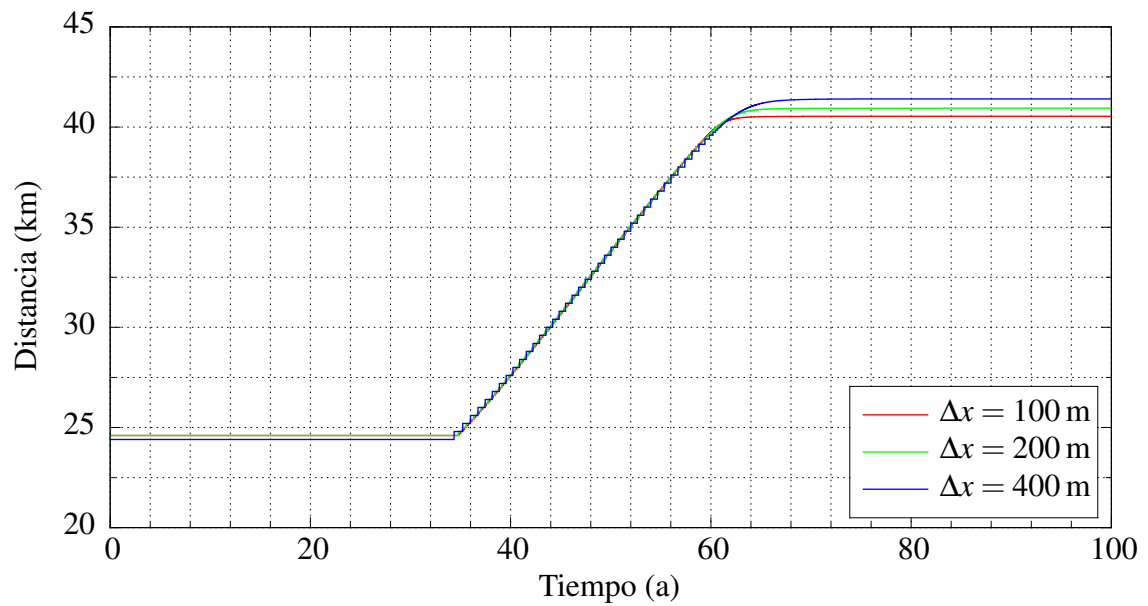


Figura 4.8. Evolución en el tiempo del largo del glaciar de lecho lineal utilizando el modelo de flotabilidad modificado para diferentes valores de Δx .

Cuadro 4.2. Parámetros utilizados en la simulación de un glaciar con lecho lineal y ancho constante, para $n = 3$.

b_0 (m)	s	Λ (m)	σ (km)	x_s (km)
3500	$-7/12$	-2000	20	25

Experimento 3.2: Variación en el ancho de la rejilla

Luego, se investiga el resultado al variar la medida del ancho de la rejilla Δx utilizando tres valores diferentes, para lo cual se ha elegido mostrar la solución para la forma del tipo I en la figura 4.10, donde también se aprecian importantes disparidades de ~ 1 km en la posición del frente glaciar, siendo mayor la velocidad de desprendimiento a medida que se aumenta el tamaño de Δx .

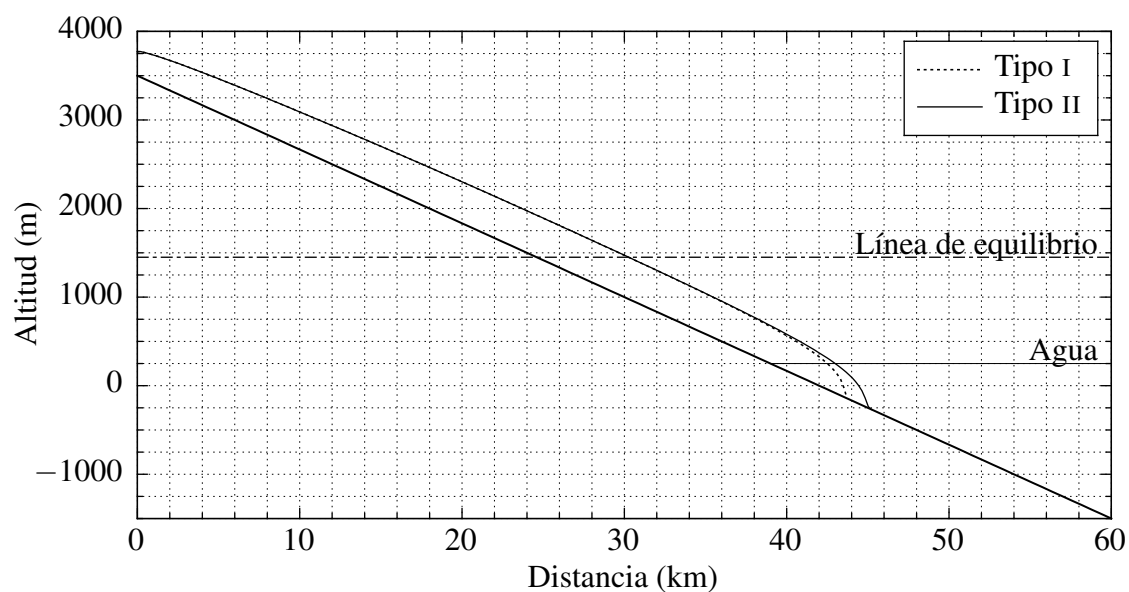
4.2. Glaciar de lecho sinuoso

Se modifica la topografía del lecho para reproducir el retroceso de un glaciar que produce témpanos, para lo cual se le agrega una ondulación descrita por la función gaussiana (Nick y Oerlemans, 2006)

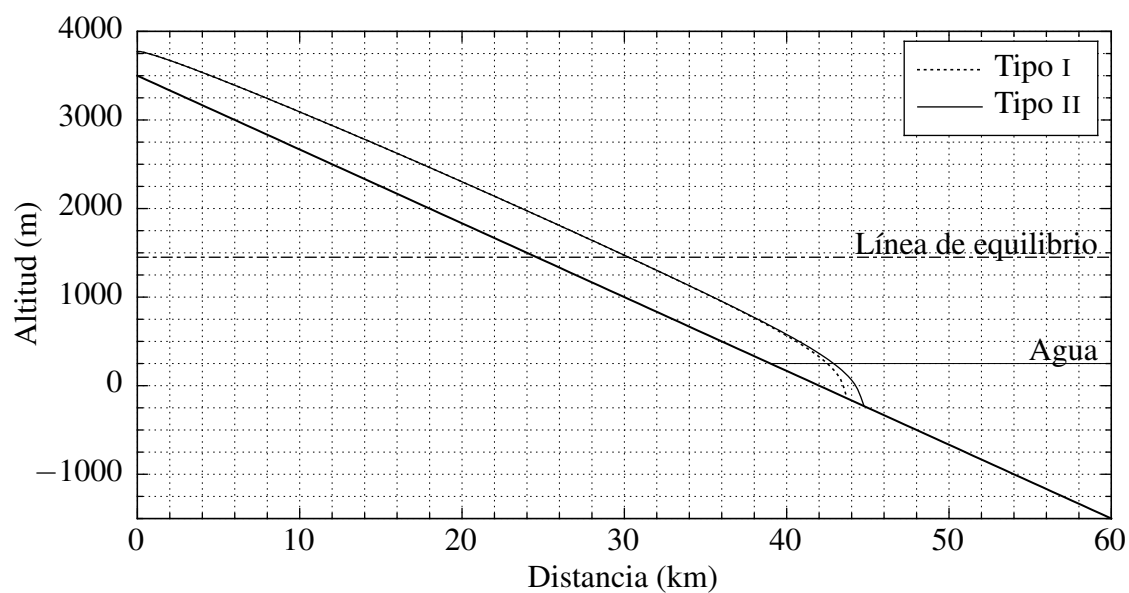
$$b(x) = b_0 + sx + \Lambda \exp \left[- \left(\frac{x - x_s}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (4.6)$$

donde Λ , σ y x_s corresponden a la amplitud, ancho y posición de la sinuosidad, respectivamente. Su ubicación y forma se elige de tal modo que el glaciar en su retroceso transite por una zona de aguas someras, para luego ingresar en aguas profundas, tal como suele ocurrir en los grandes glaciares de la Patagonia que acaban en el mar o en los grandes lagos.

Los valores elegidos para los parámetros de la ecuación (4.6) se listan en el cuadro 4.2. En cuanto al resto de las variables se han utilizado los enumerados en el cuadro 4.1 con $n = 3$, a excepción de la pendiente s . Se ha utilizado un ancho constante para todo el glaciar, pero con un escalón en $x = 8$ km. En las posiciones previas a este punto el ancho es exactamente el doble que en el resto del valle de montaña.



(a) Tipo I y II sin correcciones.



(b) Tipo I y II con la corrección en el frente del glaciar.

Figura 4.9. Glaciar de lecho lineal en equilibrio, utilizando el modelo de aguas profundas y resuelto para las formas del tipo I y II.

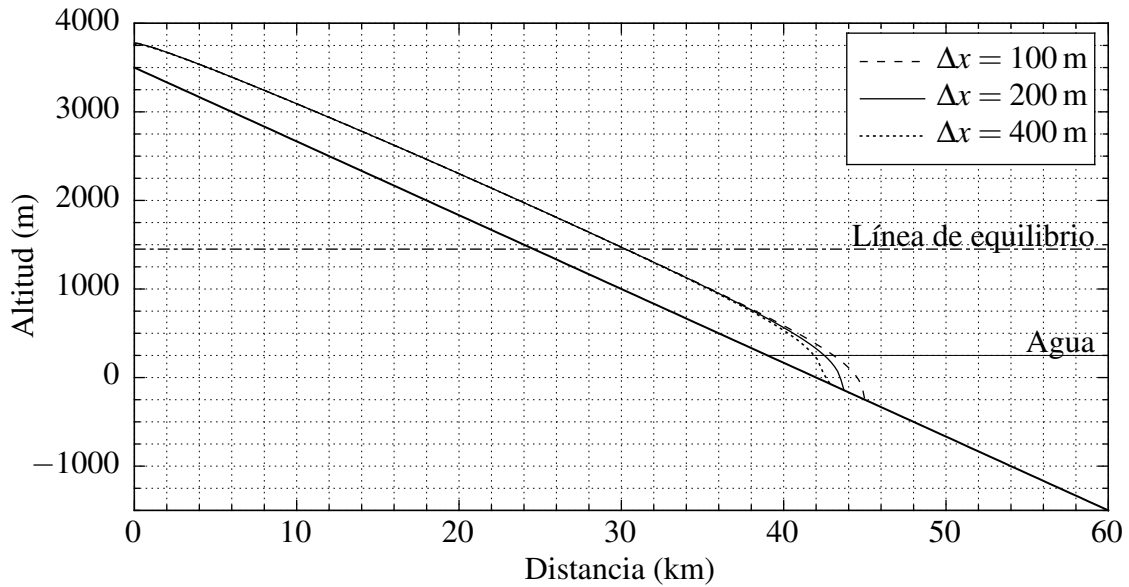


Figura 4.10. Modelo de aguas profundas resuelto para la forma del tipo I, usando diferentes valores para el ancho de la rejilla Δx .

4.2.1. Respuesta a un cambio climático

Para romper el estado de equilibrio del glaciar y lograr su retroceso se lo somete a un cambio climático, el cual se obtiene con una variación en el balance de masa de la forma

$$\dot{b}(h,t) = \dot{b}_0(h) + \Delta\dot{b}(t), \quad (4.7)$$

donde \dot{b}_0 es el balance de masa inicial, también conocido como balance de referencia (Oerlemans, 1997), y $\Delta\dot{b}$ es la perturbación producida, siendo independiente de la elevación. Esta es una buena aproximación para glaciares de latitudes medias situados en un clima marítimo o de transición (Oerlemans, 2001).

La alteración en el balance de masa se puede obtener modificando la elevación de la línea de equilibrio.

Se conoce como gradiente adiabático a la variación de la temperatura con la altitud, definido por

$$\gamma = -\frac{dT}{dz}, \quad (4.8)$$

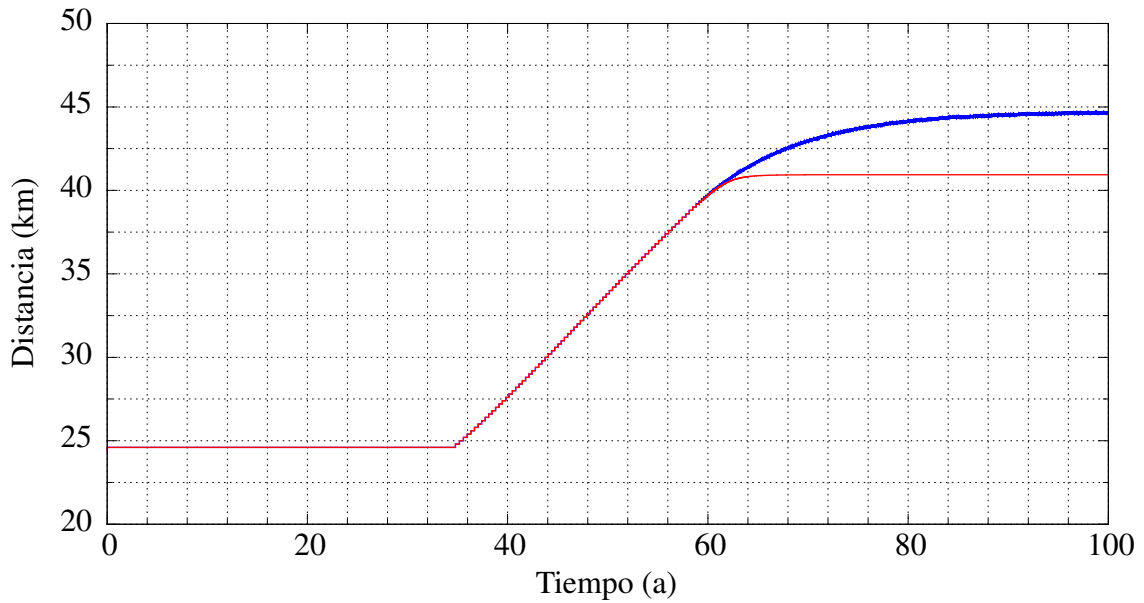


Figura 4.11. Evolución del largo del glaciar a través del tiempo, medido con respecto al eje x . Utilizando el modelo de aguas profundas (línea azul) y el modelo de flotabilidad modificado (línea roja).

con T la temperatura. Luego, un cambio en la temperatura produce una variación en la elevación de la línea de equilibrio mediante la relación

$$\frac{dE}{dT} = -\frac{1}{\gamma}. \quad (4.9)$$

Por lo tanto, un aumento lineal de la temperatura produce un incremento lineal de la línea de equilibrio cuando el gradiente adiabático es constante, siendo el caso a considerar en todos los experimentos. Así, la perturbación en el balance de masa se calcula como

$$\Delta \dot{b}(t) = -\beta(E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}}) \text{mín} \left\{ 1, \frac{t - t_0}{\delta t} \right\}, \quad (4.10)$$

donde $E_{\text{mín}}$ y $E_{\text{máx}}$ es la elevación mínima y máxima de la línea de equilibrio, respectivamente, y δt es el intervalo de tiempo entre ambos valores.

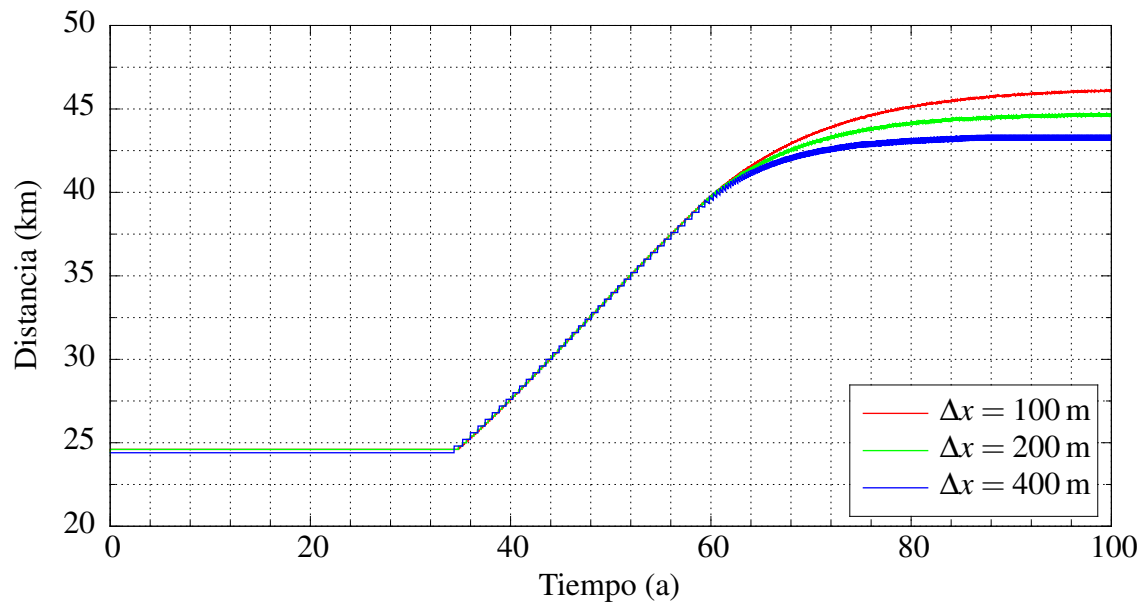


Figura 4.12. Evolución en el tiempo del largo del glaciar de lecho lineal utilizando el modelo de aguas profundas para diferentes valores de Δx .

4.2.2. Experimento 4: Modelo de flotabilidad modificado

Se comienza con la construcción del glaciar de lecho sinuoso, partiendo de un estado libre de hielo y agua. Luego, se lo hace crecer hasta aproximarse al borde derecho de la rejilla, para posteriormente instaurar un cuerpo de agua situado a una elevación de 250 m sobre el nivel de referencia, el cual lo hará retroceder debido a la producción de témpanos. Seguidamente, se espera el tiempo necesario hasta que el glaciar se estabilice. El momento en que esto ocurra será considerado el estado inicial del glaciar de lecho sinuoso en equilibrio.

Estado cuasi estable

A partir del estado inicial antes mencionado, se crea una perturbación descrita por la ecuación (4.10), utilizando los valores de $E_{\text{mín}} = 1450$ m, $E_{\text{máx}} = 1525$ m y $\delta t = 50$ a, la cual comienza a actuar desde el instante inicial t_0 .

El resultado, expuesto por la figura 4.14, si bien muestra un retroceso de ~ 3 km

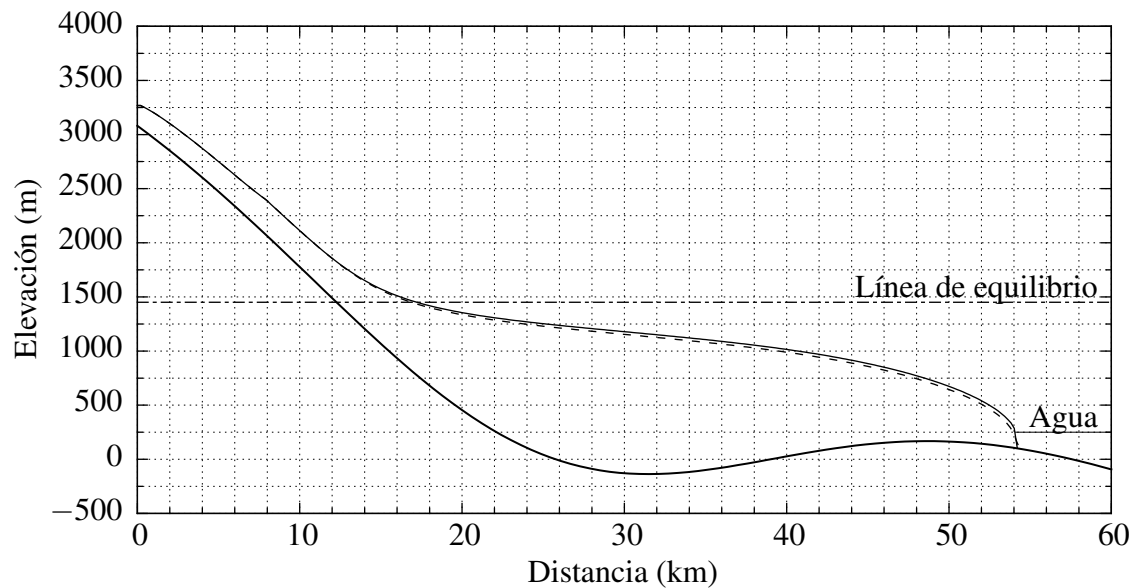


Figura 4.13. Glaciar de lecho sinuoso con producción de témpanos en equilibrio, utilizando el modelo de flotabilidad modificado (línea continua) y el modelo de aguas profundas (línea discontinua).

en la posición del frente del glaciar tras el cambio climático, sólo equivale a poco más de un 5% de su longitud horizontal total. Aunque la línea de equilibrio se mantiene constante transcurridos 50 a, el glaciar continúa retrocediendo durante 1050 a adicionales debido al desprendimiento de témpanos como única forma de ablación. Sin embargo, a medida que retrocede va disminuyendo la profundidad del agua en el frente del glaciar, por lo que el repliegue se va desacelerando a causa de una reducción en la velocidad de desprendimiento. Durante la mayor parte de estos 1100 a el glaciar permanece en un estado cuasi estable, siendo apreciable el retroceso sólo durante los primeros años.

Retroceso drástico

Comenzando desde la condición de equilibrio anterior tras la aplicación del cambio climático, se impone una nueva perturbación en el balance de masa, elevando la altitud de la línea de equilibrio también en 75 m durante igual período de tiempo. En este caso, el parámetro t_0 de la ecuación (4.10) se reemplaza por el instante de tiempo en que el

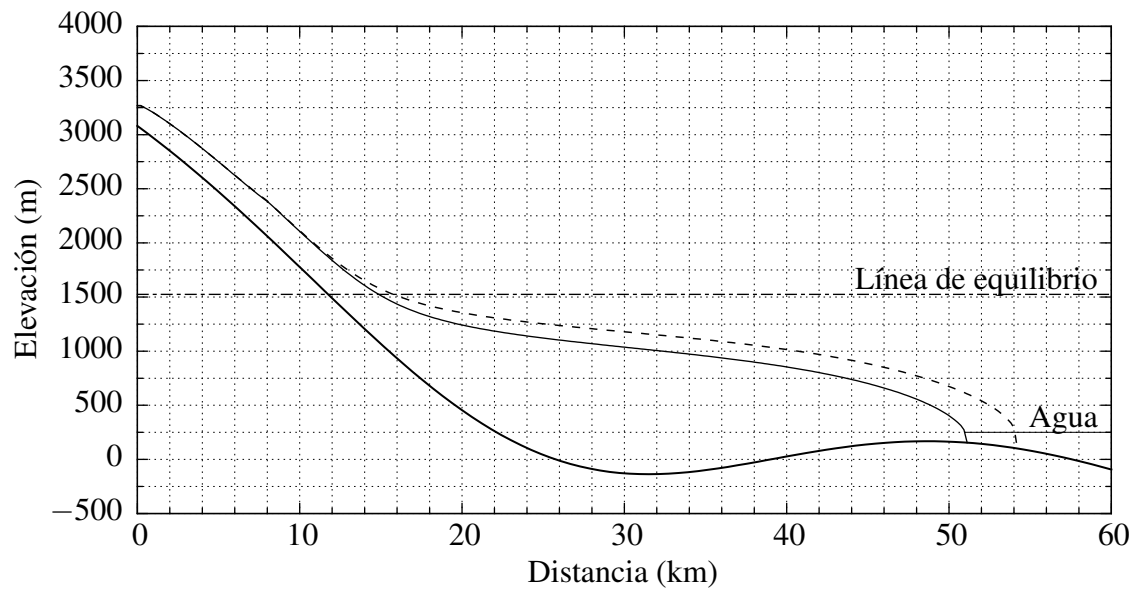


Figura 4.14. Glaciar de lecho sinuoso estabilizado tras aumentar la altitud de la línea de equilibrio en 75 m hasta un valor de 1525 m, utilizando el modelo de flotabilidad modificado. La línea discontinua representa el estado del glaciar antes de su retroceso.

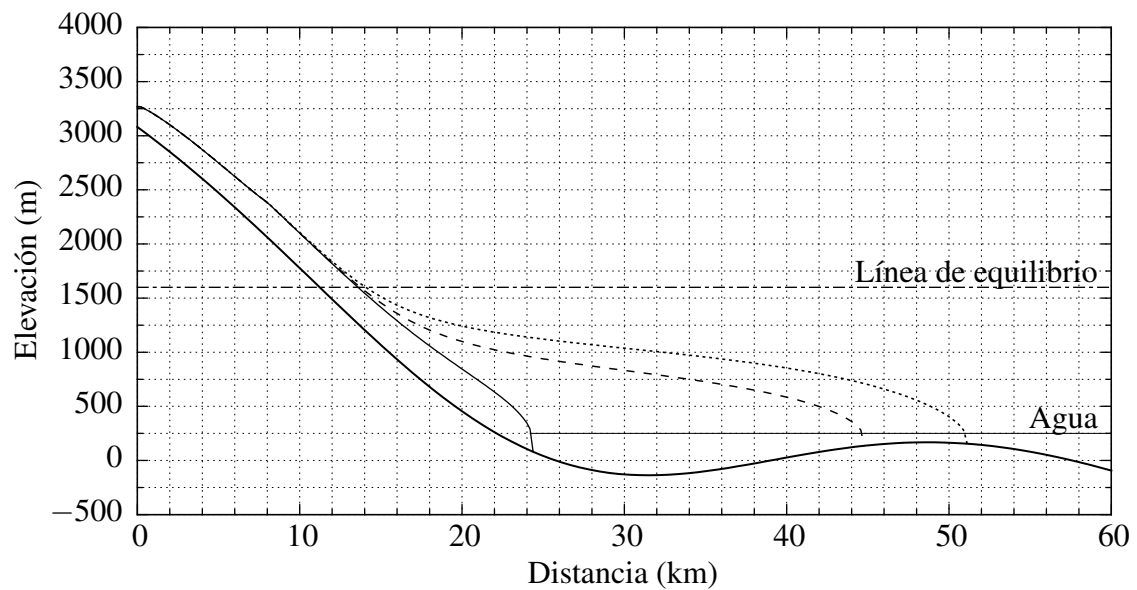


Figura 4.15. Glaciar de lecho sinuoso estabilizado tras aumentar la altitud de la línea de equilibrio en 75 m hasta un valor de 1600 m, utilizando el modelo de flotabilidad modificado. La línea punteada representa el estado del glaciar antes de su nuevo retroceso y la línea discontinua constituye la posición de éste antes de su desintegración tras ingresar en aguas profundas.

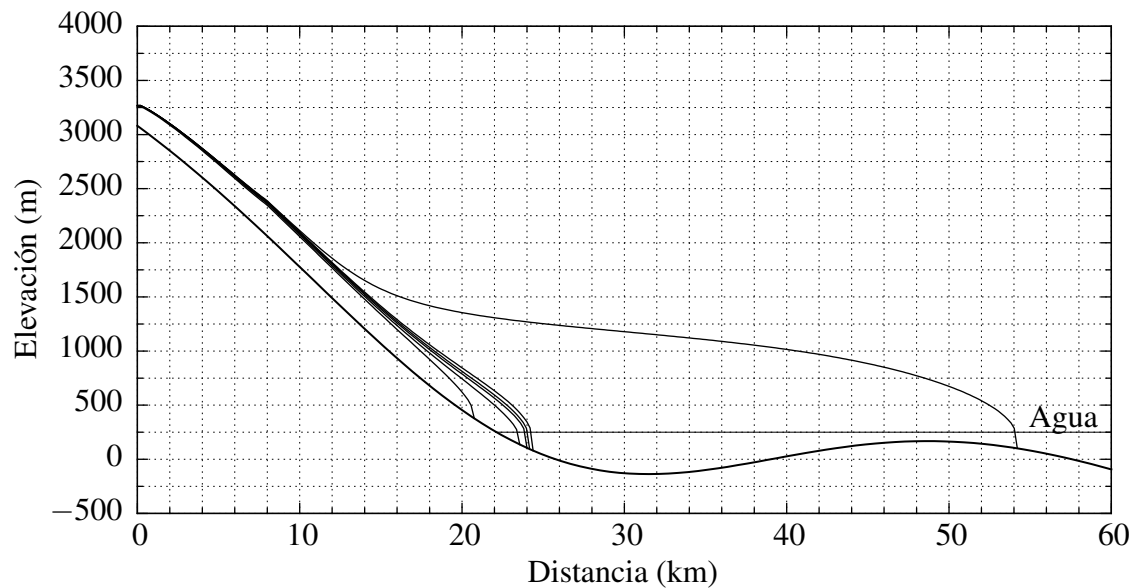


Figura 4.16. Perfiles del glaciar de lecho sinuoso para seis diferentes estados de equilibrio, utilizando el modelo de flotabilidad modificado. El primero corresponde al estado inicial del glaciar y los restantes se obtienen luego de aumentar repetidamente la elevación de la línea de equilibrio en 150 m.

glaciar ha alcanzado el equilibrio luego de la primera perturbación.

El resultado (figura 4.15) es un importante retroceso de ~ 27 km en unos 220 a, tiempo luego del cual se estabiliza nuevamente. Sin embargo, la velocidad de este repliegue ocurre de modo diferenciado. En un comienzo, el frente glaciar se mueve hacia aguas menos profundas, razón por la cual el glaciar sólo retrocede unos 5 km durante los primeros 195 a. Luego, cuando la pared frontal se traslada hacia aguas más profundas, aumenta rápidamente la velocidad de desprendimiento y el glaciar retrocede ~ 22 km en sólo 25 a.

Retirada del agua

Tras la catastrófica pérdida de hielo antes mencionada, el glaciar entra en una fase durante la cual permanece relativamente inalterable ante un cambio climático.

A partir del último estado de equilibrio alcanzado, se aplican nuevas perturbaciones en el balance de masa hasta que el glaciar se retire completamente del agua. En la ecuación (4.10) se utilizan los valores $\delta t = 50$ a y $E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}} = 150$ m. Tras cada perturbación el glaciar se estabiliza aproximadamente al mismo tiempo que la elevación

de la línea de equilibrio se vuelve constante (para $\delta t = 50 a$).

La figura 4.16 muestra la evolución del glaciar tras aplicar las condiciones recién mencionadas. Cada curva sobre el terreno describe el perfil del glaciar cuando ha alcanzado el equilibrio. La curva que encierra el área más grande representa el estado inicial del glaciar en equilibrio, cuando $E = 1450$ m. Cada retroceso corresponde al perfil del glaciar en equilibrio tras aumentar la elevación de la línea de equilibrio en 150 m, hasta alcanzar un valor de $E = 2200$ m en aquel perfil donde el frente glaciar se encuentra fuera del agua.

4.2.3. Experimento 5: Modelo de aguas profundas

De forma análoga al modelo de flotabilidad modificado, se crea el glaciar de lecho sinuoso a partir de un estado libre de hielo y agua. Una vez formada la masa de hielo se sobrepone un cuerpo de agua situado a 250 m de elevación y se espera hasta que alcance un estado equilibrio, que corresponderá al instante inicial de la simulación.

Se utilizan los parámetros del cuadro 4.2, y para el resto los del cuadro 4.1. Se elige un valor de $\zeta = 8,5 a^{-1}$, el cual ha sido seleccionado de modo que las dimensiones del glaciar en su estado inicial sean similares a la que se obtiene con el modelo de aguas profundas (figura 4.13).

Retroceso drástico

Se aplica una perturbación en el balance de masa consistente en aumentar de forma lineal la línea de equilibrio en 75 m durante 50 a, de acuerdo a la ecuación (4.10).

A diferencia de lo que ocurre al utilizar el modelo de flotabilidad modificado, con el de aguas profundas el glaciar no logra estabilizarse antes de ingresar a aguas profundas. Razón por la cual la pérdida de hielo abarca casi toda la porción de lecho que queda sumergida por el agua. El glaciar tarda ~ 750 a en alcanzar un nuevo equilibrio.

En la figura 4.20 se muestra el perfil del glaciar antes de acelerar su retroceso luego del ingreso hacia aguas profundas (línea discontinua). Hecho que sucede ~ 250 a antes de alcanzar el nuevo equilibrio.

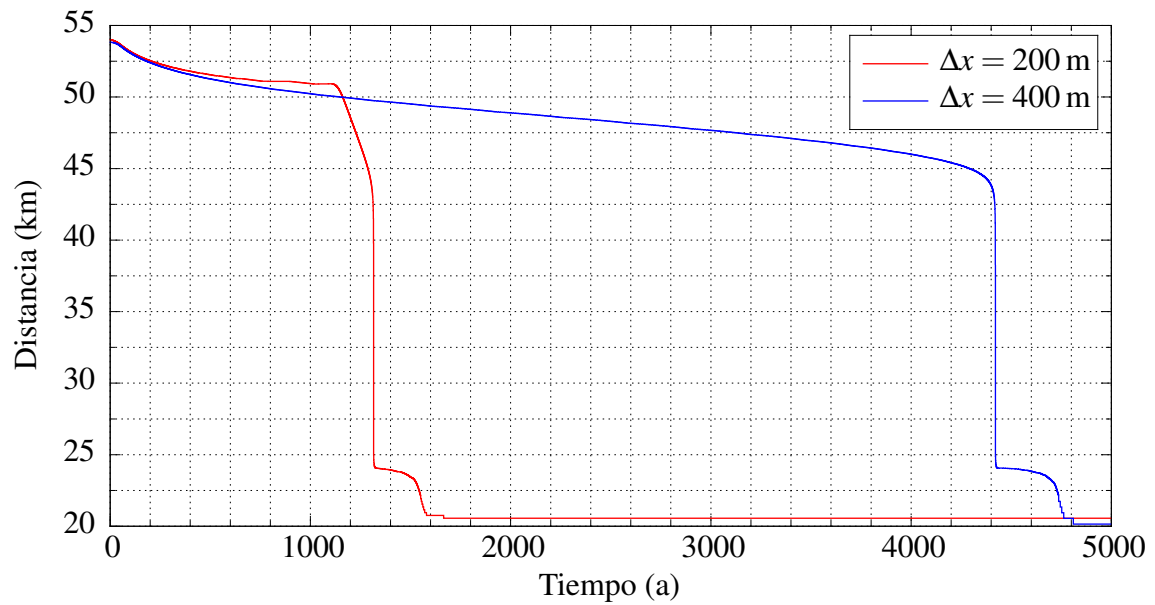


Figura 4.17. Evolución del largo total del glaciar de lecho sinuoso a través del tiempo, medido con respecto al eje x ; utilizando el modelo de flotabilidad modificado.

Retirada del agua

Comenzando desde el estado de equilibrio anterior, se realiza una perturbación de la misma magnitud, aumentando la línea de equilibrio en 75 m. Cuando el glaciar se estabiliza, se aplican nuevas perturbaciones de forma repetitiva hasta que logre abandonar completamente el cuerpo de agua, pero aumentando la línea de equilibrio en 150 m luego de cada estado de equilibrio alcanzado.

La figura 4.21 muestra los seis estados de equilibrio desde el instante inicial hasta que el frente glaciar abandona el agua, cada uno separado por una perturbación en el balance de masa consistente en aumentar en 150 m la elevación de la línea de equilibrio desde el nivel de referencia.

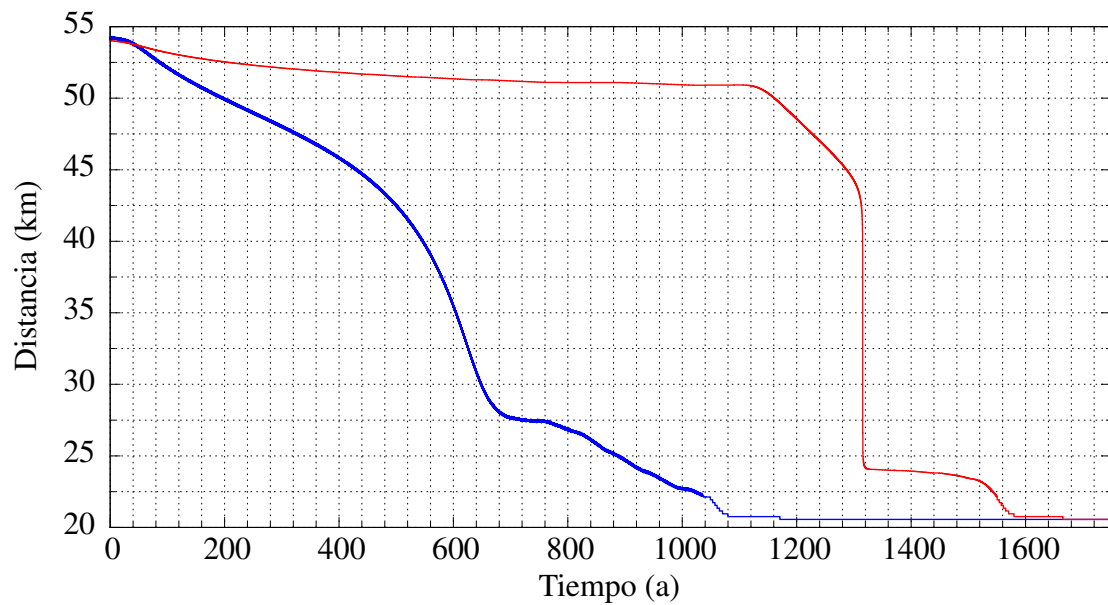


Figura 4.18. Evolución del largo total del glaciar de lecho sinuoso a través del tiempo, medido con respecto al eje x ; utilizando el modelo de aguas profundas (línea azul) y el modelo de flotabilidad modificado (línea roja).

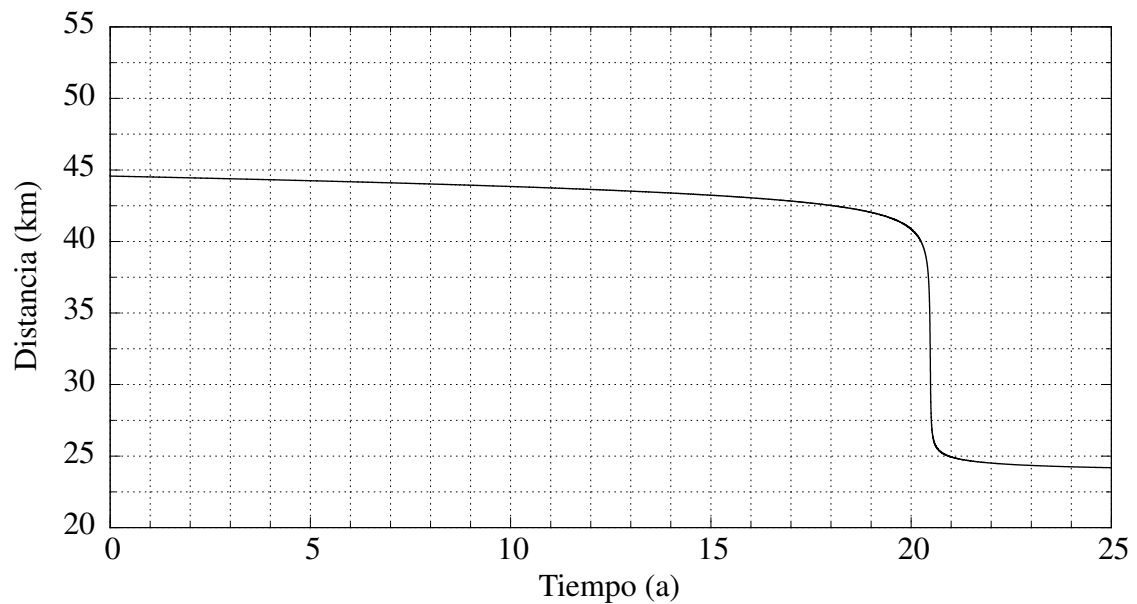


Figura 4.19. Longitud del glaciar durante la fase de desintegración ocurrida al utilizar el modelo de flotabilidad modificado.

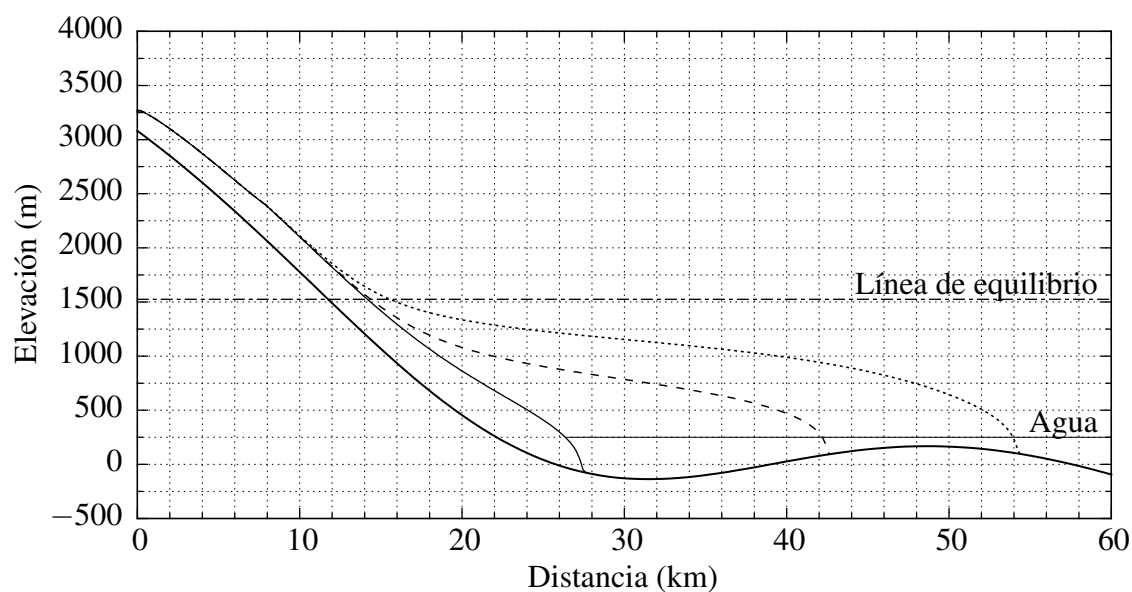


Figura 4.20. Glaciar de lecho sinuoso estabilizado tras aumentar la altitud de la línea de equilibrio en 75 m hasta un valor de 1525 m, utilizando el modelo de aguas profundas. La línea punteada representa el estado del glaciar antes de su retroceso y la línea discontinua cuando se acelera la velocidad de repliegue.

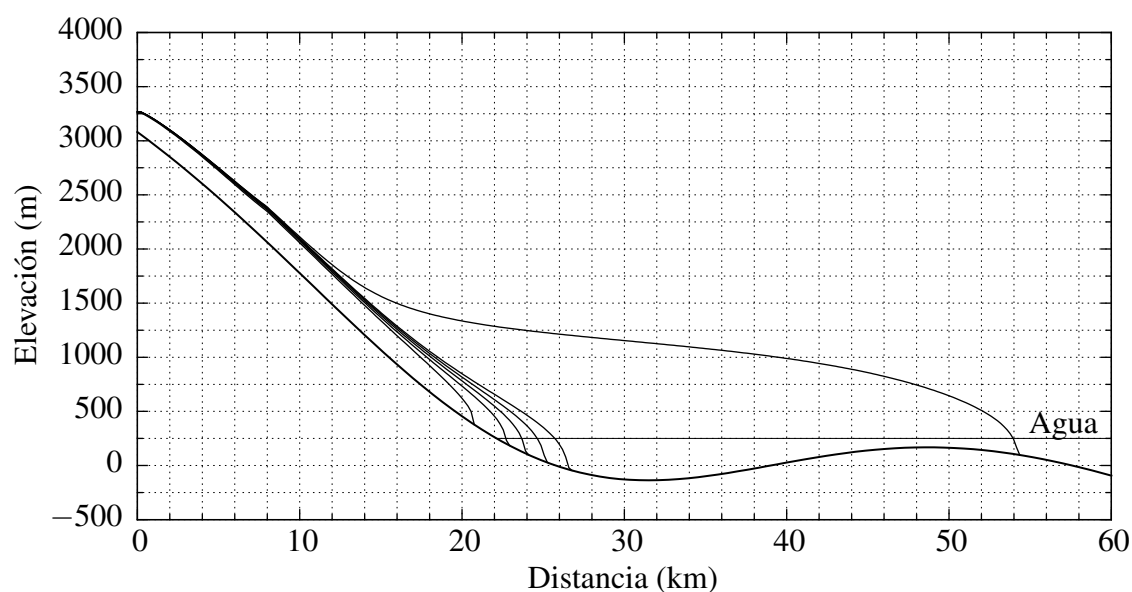


Figura 4.21. Perfiles del glaciar de lecho sinuoso para seis diferentes estados de equilibrio, utilizando el modelo de aguas profundas. El primero corresponde al estado inicial del glaciar y los restantes se obtienen luego de aumentar repetidamente la elevación de la línea de equilibrio en 150 m.

Capítulo 5

Discusiones

5.1. Efectos numéricos en la discretización de las ecuaciones

De los resultados obtenidos, se ha encontrado que la mayor precisión numérica que ofrece la discretización según la forma del tipo I en los experimentos de EISMINT no justifica su preferencia por sobre la forma del tipo II, en desmedro de la velocidad de cómputo, que aumenta significativamente para la forma del tipo II cuando se utiliza una rejilla de menor resolución en la dirección espacial. Mientras que para la forma del tipo I la velocidad de cálculo aumenta en una menor proporción bajo esta misma condición.

La mayor precisión numérica ofrecida por la discretización según la forma del tipo I sólo es apreciable en el frente del glaciar. No obstante, se aplicó una corrección en la forma del tipo II basada en una aproximación en series de Taylor, que fue propuesta por Van den Berg y col. (2006), únicamente para el punto de la rejilla situado en el frente del glaciar. De esta forma se obtuvieron resultados con una precisión similar a la lograda con la forma del tipo I, mas con las ventajas que otorga el uso de la forma del tipo II.

La resolución de la rejilla utilizada para representar la dimensión espacial del glaciar a lo largo del eje x influye en su comportamiento durante la simulación. La elección de valores de Δx más pequeños implica un mayor flujo de hielo en el frente del glaciar, que al superar el balance de masa negativo comienza a llenar de hielo el siguiente punto de la rejilla. Por el contrario una menor densidad de puntos en el eje x implica un flujo de hielo más pequeño en el margen del glaciar y un menor crecimiento (o mayor decrecimiento) de éste (Van den Berg y col., 2006). En el primer caso el mayor flujo es ocasionado por una pendiente superior de la superficie del glaciar, lo que se compensa parcialmente con

un menor espesor del hielo. Viceversa para el segundo caso de un menor flujo de hielo.

A partir de los resultados, se puede inferir que el efecto numérico anterior no es importante para un glaciar sin calving. De acuerdo a Van den Berg y col. (2006), estas consecuencias son mucho más evidentes en los márgenes de un campo de hielo continental (*ice-sheet*) que en un glaciar de montaña.

5.2. Reproducción de los desprendimientos

En el experimento 2.1 se comprobó que en el modelo de flotabilidad modificado, las diferencias en la forma de discretizar de acuerdo a los experimentos de EISMINT son más notorias que cuando no hay calving, obteniendo un menor largo siempre para la forma del tipo II. No obstante, cuando se aplica la corrección en el frente del glaciar descrita anteriormente, que se basa en una aproximación en series de Taylor, esta discrepancia desaparece. Por lo tanto, para la simulación de los desprendimientos usando el modelo de flotabilidad modificado se hace necesario aplicar esta corrección para disponer de la mayor velocidad de cómputo que ofrece la forma del tipo II.

Cuando se utiliza el modelo de aguas profundas, estas diferencias producidas debido a las formas de discretizar según los experimentos de EISMINT son más evidentes que en el modelo de flotabilidad modificado. Además, la corrección aplicada en el frente del glaciar anteriormente descrita sólo logra reducir en parte esta discrepancia. El resultado es que usando la forma del tipo II, la velocidad de desprendimiento es siempre menor que usando la forma del tipo I.

En los experimentos 2.3 y 3.2 se investigaron los efectos al variar el ancho de rejilla utilizado para los modelos de aguas profundas y de flotabilidad modificado, respectivamente. Para ambos modelos se obtienen posiciones diferentes del frente del glaciar cuando se varía el valor de Δx usado. Sin embargo, las consecuencias son opuestas, obteniendo una mayor velocidad de desprendimiento para rejillas de mayor resolución en el modelo de flotabilidad modificado, mientras que para el modelo de aguas profundas la mayor velocidad de desprendimiento se consigue con rejillas de menor resolución. Pese a lo anterior, los problemas relacionados con la discretización no arrojan grandes diferencias en las simulaciones llevadas a cabo en un glaciar de lecho lineal. No obstante,

en un escenario más realista, el lecho glaciar presenta sinuosidades y la fiabilidad de los modelos para reproducir los desprendimientos se ve comprometida.

Los experimentos 4 y 5 muestran el retroceso de un glaciar de lecho sinuoso bajo similares perturbaciones climáticas, utilizando el modelo de flotabilidad modificado y el de aguas profundas, respectivamente, y con una resolución de $\Delta x = 200$ m en ambos casos. Sin embargo, tras alcanzar el equilibrio luego del retroceso vinculado a la primera perturbación climática, el largo del glaciar reproducido mediante el modelo de aguas profundas es aproximadamente sólo la mitad de la longitud que se obtiene al utilizar el modelo de flotabilidad modificado. La elevación submarina creada en las simulaciones de glaciar de lecho sinuoso sirve de punto de apoyo para que el glaciar reduzca la velocidad de desprendimiento y alcance un estado equilibrio al transitar por dicha zona. En cambio, en el modelo de aguas profundas la mayor velocidad de desprendimiento provoca que el glaciar ingrese en aguas profundas y alcance un estado de equilibrio mucho más al fondo en el fiordo. Lo anterior sugiere que, en el retroceso simulado con el modelo de flotabilidad modificado, si se utiliza una resolución mayor puede ocurrir que el glaciar no sea capaz de estabilizarse en la elevación submarina y por consiguiente retroceder hasta un punto cercano al retroceso alcanzado con el modelo de aguas profundas.

En el experimento 4 es necesario una segunda perturbación climática para lograr un retroceso del glaciar hacia aguas profundas. De esa forma, se puede realizar una comparación sobre el comportamiento del glaciar cuando transita por esta zona. Al utilizar el modelo de flotabilidad modificado el glaciar se desintegra en un período de tiempo muy breve, mientras que con el modelo de aguas profundas el retroceso es más gradual. Nick y col. (2007b), basados en datos del Breidamerkurjökull en Islandia, concluyeron que el modelo de flotabilidad modificado es capaz de reproducir correctamente el retroceso de un glaciar en aguas poco profundas, en tanto que en aguas de profundidad considerable éste falla y recomiendan el modelo de aguas profundas, pues el modelo de flotabilidad modificado causa una pérdida de masa irreal en un período de tiempo demasiado corto. No obstante, de los resultados en el presente trabajo se deduce que el modelo de aguas profundas no reproduce correctamente la rápida pérdida de masa que ocurre a veces en glaciares templados, como el Glaciar Columbia y otros de la Patagonia. Y pese a la abrupta pérdida de masa reproducida por el modelo de flotabilidad modificado, el tiempo

de retroceso se acerca más a estos casos documentados.

De los experimentos con glaciares de lecho lineal se comprueba además que no es posible reproducir los ciclos de avance de un glaciar que produce témpanos, puesto que es necesaria la formación de una morrena que permita su avance. Nick y col. (2007a) desarrollaron un modelo para describir la presencia y acumulación de sedimentos. Sin embargo, no aborda la dinámica implicada en su formación, algo que resulta imprescindible para reproducir correctamente un ciclo de avance.

Del mismo modo, resulta indispensable conocer la geometría del lecho glaciar para lograr reproducir de modo fidedigno el retroceso de un glaciar que produce témpanos, debido a su sensibilidad respecto a la profundidad del agua en su frente. Cuando no se tiene acceso a estos datos, es posible estimar el espesor del hielo mediante la aproximación de hielo poco profundo, que consiste en asumir que el esfuerzo basal es casi constante a lo largo de la línea de flujo del glaciar. A partir de la ecuación (2.41) se puede obtener la siguiente expresión para el espesor del hielo:

$$H = \frac{\tau_d}{\rho g} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{-1}. \quad (5.1)$$

No obstante, esta estimación requiere de que la superficie del glaciar sea previamente suavizada, ya que las características presentes de pequeña escala no obedecen a la mecánica más simple implantada por el modelo. Luego, una superficie irregular repercute de forma desmesurada en la estimación del espesor, derivando en una topografía irreal del lecho glaciar. Pues, cuando $|\partial h / \partial x| \rightarrow 0$; $H \rightarrow \infty$.

Conclusiones

Se ha investigado los efectos de discretizar la ecuación de continuidad integrada verticalmente, sobre la cual se ha construido un modelo unidimensional para reproducir el desplazamiento del hielo de un glaciar de valle, y el resultado de aplicar dos modelos diferentes para representar la ablación ocasionada por la producción de témpanos de hielo, fenómeno conocido como *calving*.

La ecuación que describe el movimiento de la masa de hielo, reformulada como un proceso difusivo, se resuelve numéricamente calculando la difusividad de dos formas diferentes: en puntos discretos de la rejilla que conforma el dominio (tipo II) y en puntos intermedios de ésta (tipo I). A partir de lo cual se ha inferido que la forma del tipo II presenta mayores ventajas técnicas que la forma del tipo I, ofreciendo la primera una velocidad de cómputo considerablemente superior y la segunda una mayor precisión numérica, la cual resulta ser intrascendente en la solución final de la simulación, mientras sólo exista ablación superficial en el glaciar.

Para reproducir la producción de témpanos, una vez que exista un cuerpo de agua en contacto con la masa de hielo, se utilizaron dos modelos, conocidos como modelo de aguas profundas y modelo de flotabilidad modificado, siendo ambos proporcionales a la profundidad del agua en el frente del glaciar. Los resultados arrojaron que el modelo de flotabilidad modificado reproduce de mejor manera el retroceso de un glaciar, destacando la rápida desintegración de su frente cuando éste transita por aguas profundas. Ambos modelos evidencian discrepancias al variar el ancho de la rejilla y al discretizar de un modo u otro la ecuación de continuidad integrada verticalmente conforme a lo descrito en el párrafo anterior, diferencias que son más notables al utilizar el modelo de aguas profundas.

Se realizó una corrección para la discretización del tipo II en el borde del glaciar, basada en una aproximación en serie de Taylor. De esta forma, se logró reducir al mínimo la diferencia existente en la geometría del frente glaciar respecto de la discretización del tipo I. Esta modificación también corrige las discrepancias existentes como resultado de discretizar de distinta forma la difusividad al momento que ocurre un desprendimiento descrito por el modelo de flotabilidad modificado. Sin embargo, esta disimilitud persiste en el modelo de aguas profundas.

Como consecuencia, se ha desechado el modelo de aguas profundas y se ha optado por el de flotabilidad modificado para la simulación de calving en un glaciar. No obstante, para reproducir un retroceso de modo fiable se requieren correcciones para eliminar la dependencia del ancho de rejilla utilizado y resulta imprescindible conocer con exactitud la topografía del lecho glaciar. Además, no fue posible reproducir el ciclo que avanza que presentan este tipo de glaciares luego de un retroceso abrupto, puesto que el modelo no considera la formación de una morrena frontal que permita disminuir la velocidad de producción de témpanos y de esta forma lograr que el glaciar avance en aguas profundas.

Bibliografía

- Brown, C. S., M. F. Meier y A. Post (1982). «Calving speed of Alaska tidewater glaciers, with application to Columbia Glacier». En: *U. S. Geological Survey Professional Paper* 1258.
- Budd, W. F., P. L. Keage y N. A. Blundy (1979). «Empirical studies of ice sliding». En: *Journal of Glaciology* 23.89, págs. 157-170.
- Bueler, Ed (2010). *Numerical modelling of ice-sheets and ice shelves*.
- Clarke, Garry K. C. (1987). «Fast glacier flow: Ice streams, surging, and tidewater glaciers». En: *Journal of Geophysical Research* 92, págs. 8835-8841.
- Cuffey, K.M. y W.S.B. Paterson (2010). *The Physics of Glaciers*.
- Hindmarsh, Richard C. A. y Antony J. Payne (1996). «Time-step limits for stable solutions of the ice-sheet equation». En: *Annals of Glaciology* 23, págs. 74-85.
- Huybrechts, Philippe, Tony Payne y EISMINT Intercomparison Group (1996). «The EISMINT benchmarks for testing ice-sheet models». En: *Annals of Glaciology* 23, págs. 1-12.
- IPCC (2001). *IPCC Third Assessment Report*. Inf. téc. Intergovernmental Panel on Climate Change.
- Lliboutry, L. (1956). *Nieves y Glaciares de Chile*.
- Mercer, J. H. (1961). «The Response of Fjord Glaciers to changes in the Firn Limit». En: *Journal of Glaciology* 10.29, págs. 850-858.
- Morton, K. W. y D. F. Mayers (2005). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*.
- Nick, F. M. y J. Oerlemans (2006). «Dynamics of tidewater glaciers: comparison of three models». En: *Journal of Glaciology* 52.177, págs. 183-190.

- Nick, F. M., C. J. van der Veen y J. Oerlemans (2007a). «Controls on advance of tidewater glaciers: Results from numerical modeling applied to Columbia Glacier». En: *Journal of Geophysical Research* 112.
- Nick, Faezeh M., Johannes van der Kwast y Johannes Oerlemans (2007b). «Simulation of the evolution of Breidamerkurjökull in the late Holocene». En: *Journal of Geophysical Research* 112.
- Nick, Faezeh Maghami (2006). «Modelling the behaviour of tidewater glaciers». Tesis de lic. Universiteit Utrecht.
- Nye, J. F. (1953). «The flow law of ice from measurements in glacier tunnels, laboratory experiments and the Jungfraufirn borehole experiment.» En: *Proceedings of the Royal Society* 219.1139, págs. 477-489.
- Nye, J. F. (1965). «The flow of a glacier in a channel of rectangular, elliptic, or parabolic cross-section». En: *Journal of Glaciology* 5, págs. 661-690.
- Nye, J. F. (1967). «Plasticity solution for a glacier snout». En: *Journal of Glaciology* 24, págs. 382-389.
- Oerlemans, J. (1986). «An attempt to simulate historic front variations of Nigardsbreen, Norway». En: *Theor. Appl. Climatol.* 37.3, págs. 126-135.
- Oerlemans, J. (1997). «A flowline model for Nigardsbreen, Norway: projection of future glacier length based on dynamic calibration with the historic record». En: *Annals of Glaciology*.
- Oerlemans, J. (2001). *Glaciers and Climate Change*. Ed. por (PA) : A.A. Balkema Publishers Lisse ; Exton. CRC Press; 1 edition.
- Oerlemans, J. y F. M. Nick (2006). «Modelling the advance retreat cycle of a tidewater glacier with simple sediment dynamics». En: *Global and Planetary Change* 50, págs. 148-160. DOI: 10.1016/j.gloplacha.2005.12.002.
- Post, Austin (1975). «Preliminary hydrology and historic terminal changes of Columbia Glacier, Alaska». En: *U.S. Geological Survey Hydrographic Investigations Atlas* 559.
- Reeh, Niels, Christoph Mayer, Heinz Miller, Henrik Højmark Thomsen y Anker Weidick (1999). «Present and past climate control on fjord glaciations in Greenland: Implications for IRD deposition in the sea». En: *Geophysical Research Letters* 26, págs. 1039-1042.

- Van den Berg, J., R.S.W. van de Wal y J. Oerlemans (2006). «Effects of spatial discretization in ice-sheet modelling using the shallow-ice approximation». En: *Journal of Glaciology* 52.176.
- Van der Veen, C. J. (1996). «Tidewater Calving». En: *Journal of Glaciology* 42.141, págs. 375-385.
- Vieli, Andreas, Martin Funk y Heinz Blatter (2001). «Flow dynamics of tidewater glaciers: a numerical modelling approach». En: *Journal of Glaciology* 47.159, págs. 595-606.
- Weertman, J. (1957). «On the sliding of glaciers». En: *Journal of Glaciology* 3.21, págs. 33-38.
- Zuo, Z. y J. Oerlemans (1997). «Numerical modelling of the historic front variation and the future behaviour of the Pasterze glacier, Austria». En: *Annals of Glaciology* 24.